Secretaria Municipal de Educação de São Paulo

Orientações Didáticas do Currículo da Cidade

Volume 1

ENSINO FUNDAMENTAL Matemática

PREFEITURA DE SÃO PAULO
EDUCAÇÃO

Prefeitura da Cidade de São Paulo
Bruno Covas
Prefeito

Secretaria Municipal de Educação
Alexandre Schneider
Secretário Municipal de Educação

Daniel Funcia de Bonis
Secretário Adjunto

Fatima Elisabete Pereira Thimoteo
Chefe de Gabinete

Secretaria Municipal de Educação de São Paulo

Orientações Didáticas
do Currículo da Cidade

Matemática

volume 1

São Paulo | 2019

PREFEITURA DE SÃO PAULO
EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA - COPED

Minéa Paschoaleto Fratelli - Coordenadora

ASSESSORIA TÉCNICA - COPED
Fernanda Regina de Araujo Pedroso
Tânia Nardi de Pádua

DIVISÃO DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO – DIEFEM

Carla da Silva Francisco - Diretora

EQUIPE TÉCNICA – DIEFEM
Cíntia Anselmo dos Santos
Daniela Harumi Hikawa
Daniella de Castro Marino Rubio
Felipe de Souza Costa
Heloísa Maria de Morais Giannichi
Hugo Luís de Menezes Montenegro
Humberto Luis de Jesus
Karla de Oliveira Queiroz
Kátia Gisele Turollo do Nascimento
Lenir Morgado da Silva
Paula Giampietri Franco
Rosangela Ferreira de Souza Queiroz
Yara Dias da Silva

NÚCLEO TÉCNICO DE CURRÍCULO – NTC

Wagner Barbosa de Lima Palanch - Diretor

EQUIPE TÉCNICA – NTC
Adriana Carvalho da Silva
Carlos Alberto Mendes de Lima
Claudia Abrahão Hamada
Clodoaldo Gomes Alencar Junior
Edileusa Andrade de Carvalho Araújo Costa
Márcia Andréa Bonifácio da Costa Oliveira
Maria Selma Oliveira Maia
Mariângela do Nascimento Akepeu
Monica de Fátima Laratta Vasconcelos
Nágila Euclides da Silva Polido
Regina Célia Fortuna Broti Gavassa
Silvio Luiz Caetano
Tânia Tadeu
Vera Lúcia Benedito
Viviane Aparecida Costa

EQUIPE DE COORDENAÇÃO E ELABORAÇÃO
COORDENAÇÃO GERAL
Carla da Silva Francisco
Wagner Barbosa de Lima Palanch
Minéa Paschoaleto Fratelli

ASSESSORIA PEDAGÓGICA GERAL
Fernando José de Almeida

CONCEPÇÃO E ELABORAÇÃO DE TEXTOS
MATEMÁTICA

ASSESSORIA
Edda Curi
Suzete de Souza Borelli

EQUIPE TÉCNICA - SME
José Roberto de Campos Lima
Lineia Ruiz Trivilin
Susan Quiles Quisbert
Débora Reis Pacheco - Assessoria de Formação de Professores

AUTORES DOS TEXTOS
Celia Maria Carolino Pires (in memoriam), Cintia Ap. Bento dos Santos, Claudia Alves de Castro, Edda Curi, Eliane Matheus Plaza, Ivan Cruz Rodrigues, Janaina Pinheiro Vece, Julia de Cassia Pereira Nascimento, Linéia Ruiz Trivilim, Priscila Bernardo Martins, Simone Dias da Silva, Solange de Fátima Soares Mariano, Susan Quiles Quisbert, Suzete de Souza Borelli.

PROJETO EDITORIAL

CENTRO DE MULTIMEIOS
Magaly Ivanov - Coordenadora

NÚCLEO DE CRIAÇÃO E ARTE - Editoração e Ilustração
Ana Rita da Costa - Projeto gráfico
Angélica Dadario
Cassiana Paula Cominato
Fernanda Gomes Pacelli
Joseane Alves Ferreira

Pesquisa Iconográfica
Eliete Caminhoto

Fotos Capa
Daniel Arroyo da Cunha
Enzo Maia Boffa
Magaly Ivanov
Paula Letícia de Oliveira Floriano

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

São Paulo (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica.

Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática – volume 1. – 2.ed. – São Paulo : SME / COPED, 2019.

184p. : il.

Bibliografia

1.Educação – Currículo. 2.Ensino Fundamental. 3.Matemática – Orientação didática. I.Título.

CDD 375.001

Código da Memória Técnica: SME171/2018
Elaborado por Patrícia Martins da Silva Rede – CRB-8/5877

Disponível também em: <http://portalsme.prefeitura.sp.gov.br>

Consulte o acervo fotográfico disponível no Memorial da Educação Municipal da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo.
portal.sme.prefeitura.sp.gov.br/Memorial-da-Educacao-Municipal
Tel.: 11 5080-7301 e-mail: smecopedmemorialeducacao@sme.prefeitura.sp.gov.br

Educadores e Educadoras,

Dando continuidade ao processo de implementação do Currículo da Cidade, estas Orientações Didáticas constituem-se como mais um desdobramento de toda a discussão e proposição de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento. Nesse sentido, este documento apresenta possibilidades de trabalhos com esses objetivos sem, no entanto, limitar o poder criativo de cada professora e professor em nossa Rede.

As Orientações Didáticas não foram pensadas de modo complementar ao Currículo da Cidade, mas constituintes desse documento, que abarca diversos saberes e que tem, como principal finalidade, garantir a aprendizagem de estudantes no Município de São Paulo.

Para tanto, não perdemos de vista os princípios que visam à garantia da: equidade, colaboração, continuidade, relevância, contemporaneidade, educação integral e, como não poderia deixar de ser, da educação inclusiva, que pressupõe o respeito e a valorização da diversidade, a qual nos constitui como sujeitos e cidadãos de uma cidade multifacetada.

Assim, os documentos orientadores fazem parte de uma coleção que comporá a formação continuada de profissionais da Rede Municipal de Ensino de São Paulo, à medida que apresenta discussões importantes para que os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento ganhem vida e passem a ser uma realidade possível na ação docente.

É importante dizer que, nas páginas das Orientações Didáticas, o professor e a professora encontrarão pontos de partida e sugestões de trabalho, mas não "receitas", pois entendemos que – numa cidade tão complexa como a nossa – as realidades locais são levadas em consideração. Nosso esforço está centrado no sentido de empreender estratégias e na proposição de possibilidades para que estudantes da cidade continuem aprendendo.

Por falar em aprendizagem, o foco maior de nossas ações, organizamos a coleção de Orientações Didáticas por área e por componente curricular: Linguagens (Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa), Matemática, Ciências da Natureza (Ciências Naturais) e Ciências Humanas (Geografia e História), Tecnologia para Aprendizagem. Cada volume compreende discussões orientadoras do 1° ao 9° ano. A novidade, desta vez, é que há um documento especialmente elaborado para a Coordenadora e o Coordenador Pedagógico.

Para além dessa organização, foram pensados aspectos que entrecruzam todos os componentes curriculares, ou seja, que visam à Matriz de Saberes. Portanto, propomos orientações que considerem: o pensamento científico, crítico e a criatividade; a resolução de problemas; a comunicação; o autoconhecimento e o cuidado; a autonomia e a determinação; a abertura à diversidade; a responsabilidade e a participação; a empatia e colaboração e o repertório cultural.

Finalmente, nosso desejo é que as Orientações Didáticas fortaleçam os Projetos Político-Pedagógicos, redimensionem olhares para discussões mundiais, como os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, e que, sobretudo, continuem a garantir a aprendizagem de estudantes.

Bom trabalho!

Alexandre Schneider

Secretário Municipal de Educação

Matriz de Saberes

Saber mais

Sumário

Apresentação

O objetivo deste documento é apresentar algumas reflexões, discussões e sugestões com base em pesquisas que focalizam o ensino e a aprendizagem em Matemática com a finalidade de subsidiar os professores que ensinam Matemática na Rede Pública Municipal em sua prática de sala de aula. Partimos do princípio de que os estudos e pesquisas de Educadores Matemáticos que visam à melhoria do ensino e da aprendizagem da área podem proporcionar práticas mais consistentes e que efetivamente produzem melhores resultados nas aprendizagens dos estudantes.

Essas discussões se fazem necessárias, pois subsidiam a implementação da atualização curricular da Rede. Essa atualização possibilita um trabalho inovador em sala de aula, mas, ao mesmo tempo, traz muitos desafios aos professores. Essa proposta apresenta textos de orientação didática para cada Eixo Estruturante, além de textos a respeito da gestão de sala de aula, de jogos e brincadeiras, de processos matemáticos e das conexões extramatemática, possibilitando uma articulação entre os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento e as práticas de sala de aula.

Cabe destacar que os textos do documento apresentam momentos de reflexão para os professores e, com esse tipo de abrangência, podem subsidiar a Jornada Especial Integral de Formação - JEIF, as horas-atividade dos professores e reuniões pedagógicas. Os textos podem ser escolhidos pelo coordenador ou pelos próprios professores, de acordo com o Eixo de interesse ou com o tipo de formação do professor (polivalente ou especialista), e podem ser lidos e trabalhados por professores de todo o Ensino Fundamental. Os coordenadores devem propor aos professores leituras e reflexões interdisciplinares, o que certamente contribuirá para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática e das demais áreas do conhecimento.

O Caderno de Orientações Didáticas de Matemática foi dividido em duas partes. Na parte I, o documento explora a gestão da sala de aula, momento importante da prática do professor que precisa selecionar o que vai ensinar; fazer um diagnóstico da turma para compreender o que os estudantes já sabem e o ponto de partida para seu trabalho; organizar a classe; definir estratégias de ensino; explorar diferentes representações matemáticas; pensar nas intervenções e na avaliação. Além disso, nessa parte do documento há um texto que explora as conexões extramatemática e que possibilita o desenvolvimento de projetos interdisciplinares que são propostos no Currículo da Cidade de Matemática com foco nos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável - ODS.

No Eixo Números, tradicionalmente mais focalizado na prática dos professores, o destaque dos textos é para os campos numéricos e para a resolução de problemas. Os textos envolvem o estudo das operações com Números Naturais, racionais e inteiros, além dos diferentes tipos de cálculo (exato, aproximado, usando procedimentos de cálculo mental, escrito e calculadora). A ideia é fortalecer discussões sobre os significados e usos dos diferentes tipos de números e das operações, a compreensão das relações numéricas, das operações e de suas propriedades. Com relação aos cálculos, a ideia do texto é valorizar os processos de cálculo baseados em propriedades dos números e das operações, a aprendizagem com compreensão dos algoritmos e dos fatos fundamentais, o cálculo mental e as estimativas. Os textos estão voltados a algumas ideias fundamentais da Matemática como aproximação, proporcionalidade, ordem e representação, entre outras.

No Eixo Álgebra, procurando desmistificar o ensino de Álgebra apenas como manipulação simbólica, o documento apresenta dois textos que discutem o pensamento algébrico. O primeiro se refere aos envolvimentos iniciais das crianças com a Álgebra e à iniciação do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, sem que necessariamente sejam utilizadas notações algébricas. O estudo da Álgebra traz uma forma de pensar sobre situações matemáticas que envolvem o processo matemático de generalização, tendo por base a observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas, e expressa essas generalizações usando recursos diversos, como a linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos. O segundo texto discute as funções da álgebra e é destinado aos Ciclos Interdisciplinar e Autoral do Ensino Fundamental. Discute ainda alguns “erros” cometidos por estudantes apontados na literatura e outros identificados em protocolos de estudantes do 7º ano. Nesse Eixo, os textos focalizam algumas ideias fundamentais da Matemática como a equivalência, a proporcionalidade, a variação, a interdependência, a representação.

No Eixo Geometria, os textos focalizam o desenvolvimento do pensamento geométrico. O primeiro apresenta aspectos teóricos que possibilitam a análise de desenhos de estudantes sobre percursos e localizações, no âmbito das relações espaciais. O segundo destaca alguns estudos sobre o pensamento geométrico e apresenta elementos e características de figuras geométricas espaciais e alguns protocolos de estudantes em atividades, com foco na evolução do pensamento geométrico, a partir de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento de cada ano de escolaridade sobre figuras espaciais. Os dois últimos textos desse Eixo se referem à geometria plana. Um deles focaliza as figuras geométricas planas, elementos, características e algumas possíveis classificações e outro envolve a geometria das transformações, tema importante para a aprendizagem de ideias fundamentais da Matemática, como a congruência e a semelhança, além de outras ideias matemáticas fundamentais veiculadas nos textos, como a equivalência, a representação.

Na parte II, que inicia no Eixo Grandezas e Medidas, há dois textos, um que aborda os conceitos de grandeza e de medida, explorando grandezas usualmente utilizadas no cotidiano e que tradicionalmente são trabalhadas no Ensino Fundamental. Destaca aspectos dos sistemas de medidas, transformações e relações entre unidades e entre grandezas. Discute algumas orientações didáticas. O segundo texto desse Eixo envolve duas grandezas geométricas importantes: área e perímetro, explorando conceito, relações entre elas, algumas propostas didáticas e algumas pesquisas que apontam dificuldades de estudantes com essas grandezas. Nesse Eixo, as ideias fundamentais da Matemática vinculadas aos textos são a variação, a representação, a equivalência, a aproximação, a interdependência, a proporcionalidade.

No Eixo Probabilidade e Estatística, o documento explora algumas noções de Estatística, com foco na leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos. O texto de Combinatória focaliza todos os significados ("produto cartesiano", arranjos, combinações e permutações) explorados como ideias sem uso de fórmulas e apresenta exemplos que podem ser desenvolvidos nos Ciclos Interdisciplinar e Autoral. O texto de Probabilidade apresenta alguns tipos de abordagem possíveis desse tema e apresenta algumas atividades que podem ser desenvolvidas com estudantes desde o Ciclo de Alfabetização. Nesse Eixo as ideias fundamentais da Matemática estão associadas principalmente à variação, à interdependência, à ordem, à representação, à equivalência.

Desejamos uma boa leitura a todos os professores que ensinam Matemática na Rede Municipal da Cidade de São Paulo e que buscam a melhoria da qualidade do ensino e a aprendizagem dos estudantes nessa área do conhecimento.

Bom Estudo!

Gestão da Sala de Aula

A importância da gestão da aula de Matemática

Introdução

Este texto aborda uma temática muito importante: a gestão da aula de Matemática. Discute a qualidade do tempo didático a partir da contribuição das modalidades organizativas de planejamento, a gestão democrática da aula e o trabalho com agrupamentos produtivos como estratégias que podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem. Para isso, como sabemos, devem ser pensadas e planejadas pelo professor com antecedência e intencionalidade.

A gestão da aula, mesmo para um professor experiente, é permeada por conflitos e indagações. Afinal, embora seja imprescindível, nem mesmo um bom planejamento garante plenamente ao docente a antecipação de todos os imprevistos possíveis, uma vez que a imprevisibilidade é uma característica que se faz presente no processo de ensino.

> Professor(a), durante as aulas de Matemática você já se perguntou:
>
> O estudante não entendeu a explicação, quais intervenções devo fazer?
>
> Como se formam na cabeça do estudante os conceitos que estou ensinando?
>
> O tempo previsto para aula não foi suficiente? Como posso adequar o planejamento a essa situação?
>
> Como lidar com os conflitos entre os estudantes na sala de aula? O que posso fazer para minimizá-los?
>
> Reflita sobre essas e outras questões advindas da sua prática e continue a leitura do texto que apresenta indicativos que podem contribuir para responder algumas delas.

As questões apresentadas no quadro são algumas das inquietações que aparecem com frequência e que permeiam o trabalho do professor. Gerenciar esses conflitos, com o intuito de proporcionar a aprendizagem aos estudantes, é uma preocupação relativa à gestão da aula que, por sua vez, requer do professor constante reflexão sobre a sua prática. Schön (1992, 2000) contribui para a compreensão desse processo, pois salienta o valor epistemológico da prática e valoriza o conhecimento que nasce da atividade profissional de forma consciente e refletida. Portanto, compreendemos que a gestão da aula envolve a:

Reflexão na ação: acontece durante o momento em que a prática é executada, o que possibilita ao professor intervir e reformular o percurso da sua própria ação no instante em que acontece;

Reflexão sobre a ação: momento que exige do professor o distanciamento da sua prática de modo a reconstruí-la e analisá-la após a sua concretização;

Reflexão sobre a reflexão na ação: momento de valor epistêmico que contribui para a progressão do desenvolvimento profissional do professor, adquirindo autonomia para determinar ações futuras, a compreender problemas e descobrir novas soluções.

Como podemos perceber, a gestão da aula requer do professor a reflexão contínua sobre a sua prática, o que envolve uma série de fatores que influenciam os diferentes momentos da aula, sendo eles: o **antes,** que envolve o planejamento; o **durante,** que se refere à aula propriamente dita; e o **depois,** que compreende a avaliação da execução do planejamento e a tomada de decisão de ações futuras. Alguns desses fatores são discutidos com maior profundidade neste texto.

Professor, pense sobre a sua prática e identifique algumas situações em que você recorreu à reflexão na ação, sobre a ação e sobre a reflexão na ação para aprimorar as suas aulas.

As diferentes modalidades de planejamento

O planejamento está presente nas nossas atividades diárias. Para viajar, adquirir um bem material, controlar as despesas de uma casa, dentre outros objetivos, é preciso planejar. O planejamento é importante para nossas vidas, assim como para a gestão da aula. Ele é essencial para o professor, é o que dá segurança para um trabalho didático reflexivo, organizado e estruturalmente bem articulado.

Mas o que é planejamento? Como podemos conceituá-lo? Ele pode ajudar o professor no desenvolvimento das aulas?

Pense sobre essas questões e analise como o texto pode contribuir para esclarecê-las.

Segundo Haydt (2002), o planejamento é um processo mental que envolve análise, reflexão e previsão. Não se limitando à abstração, planejar consiste em registrar: **o que** pretendemos fazer; **como** vamos fazer e **o que** e **como** analisaremos o que propomos, a fim de averiguar se o objetivo foi atingido ou não.

Embora se apresente como uma tarefa simples, planejar é um momento complexo que envolve a antecipação e organização de todas as ações docentes. Ao planejar a aula, o professor faz a escolha do objetivo de aprendizagem; verifica o que os estudantes precisam saber para realizar a atividade; antecipa dúvidas que poderão surgir durante a aula e levanta os encaminhamentos possíveis para saná-las; pensa na melhor organização da turma para potencializar as discussões; faz a previsão do tempo para a sua realização e define critérios de avaliação para verificar o alcance do objetivo de aprendizagem proposto. Ou poderíamos dizer que sem o planejamento, as ações de ensino são improvisadas, não havendo parâmetros para analisar o avanço das aprendizagens dos estudantes.

De acordo com Nery (2007), o planejamento é o princípio de todo o trabalho que acontece na escola e na sala de aula, num movimento contínuo e interdependente em que se planeja, se registra e se avalia. Segundo a autora, em se tratando de planejamento, há uma questão fundamental a ser enfrentada no trabalho cotidiano do professor: o tempo.

O tempo, que em geral é sempre escasso, carece da necessidade de qualificá-lo didaticamente. Para Nery (2007), o tempo deve ser organizado de forma flexível, possibilitando a retomada e aprofundamento dos objetos de conhecimento, ou seja, dos conteúdos. Além disso, variar a forma de organizar o trabalho pedagógico pode criar oportunidades diferenciadas para cada estudante, o que representa um ganho significativo para a sua formação. A partir dessa consideração, ressaltamos a importância do trabalho com as modalidades organizativas.

As modalidades organizativas se referem às diferentes maneiras que o professor pode organizar o seu tempo didático. De acordo com Nery (2007, p. 109) trata-se dos variados "processos de organização do trabalho pedagógico". A seguir, contemplamos algumas dessas modalidades apresentando as suas definições.

Leia a citação a seguir:

O tempo – todos nós, professores, o sabemos – é um fator de peso na instituição escolar: é sempre escasso em relação à quantidade de conteúdos fixados no programa, nunca é suficiente para comunicar às crianças tudo o que desejaríamos ensinar-lhes em cada ano escolar. (LERNER, 2001, p. 11).

Você concorda com a afirmação da autora?

Como você tem planejado as aulas de Matemática para organizar e otimizar melhor o tempo? Recorre a qual modalidade de planejamento?

Atividades permanentes

De acordo com Nery (2007) a atividade permanente é um trabalho regular, diário, semanal ou quinzenal que objetiva uma familiaridade maior com um determinado conteúdo, de modo que os estudantes tenham a oportunidade de conhecê-lo e ampliá-lo. Pode-se afirmar que as atividades permanentes possibilitam um contato assíduo com o objeto de conhecimento. As atividades permanentes são importantes para o desenvolvimento de procedimentos, de hábitos ou de atitudes. É o caso de momentos rotineiros em que o Currículo da Cidade propõe em seus objetivos de aprendizagem e desenvolvimento: consulta ao calendário; uso do quadro numérico e do quadro de valor posicional; rodas de recitação numérica; ditados em que se exijam a leitura e a escrita dos números; apresentação de desafios e de situações-problema; trabalho com o cálculo mental, dentre outros que permeiam todos os anos do Ensino Fundamental.

Professor, retome a leitura do Currículo da Cidade, especificamente o quadro de objetivos de aprendizagem do ano de escolaridade que você leciona, faça uma relação de quais objetos de conhecimento podem ser ensinados ou requerem uma abordagem por meio das atividades permanentes.

Atividades sequenciais

As atividades sequenciais, segundo Nery (2007, p.114) pressupõe um trabalho pedagógico organizado em uma determinada ordem, durante um dado período estruturado pelo professor. Constitui-se em uma modalidade de planejamento mais orgânica: o conteúdo que vem na sequência depende do que já foi realizado (e aprendido) anteriormente. As atividades sequenciais contribuem para cumprir objetivos didáticos variados, por isso, são compostas por atividades coletivas e/ou individuais. As atividades sequenciais possibilitam, por exemplo, que o professor faça o planejamento para sanar dificuldades específicas dos estudantes sobre um determinado objeto de conhecimento.

O material de apoio aos estudantes e professores da Rede está estruturado a partir desta modalidade organizativa. Analise uma das sequências de atividades propostas pelo material observando: os objetos de conhecimento; os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento; os objetivos de desenvolvimento sustentável, a matriz de saberes e as orientações didáticas previstas (antes, durante e depois) para cada uma das atividades que a compõe.

Atividades ocasionais

As atividades ocasionais são aquelas que não foram planejadas a priori, mas que fazem sentido num determinado momento. Esta modalidade pode estar relacionada aos interesses do professor ou dos próprios estudantes. Os jogos, a visita a um determinado local, a exploração de diferentes espaços da escola ou de materiais específicos por meio de oficinas e, até mesmo, a discussão de um tema vigente contemplando as conexões extramatemática são alguns exemplos de atividades ocasionais.

Projetos temáticos

Saiba mais sobre a modalidade organizativa projeto nas aulas de Matemática no texto "Conexões Extramatemática".

O projeto temático é uma modalidade organizativa que pode ser planejada num contexto macro (da escola) e/ou micro (sala de aula). Trata-se de um planejamento pedagógico mais complexo se comparado às demais modalidades organizativas. Existem algumas características específicas e consideráveis que o distingue, sendo elas: o produto final que caracteriza o seu encerramento (livro, jornal, sarau, vídeo, a organização de uma mostra cultural ou excursão), o dimensionamento do tempo que requer um período considerável (de um mês ou mais) e a interdisciplinaridade que envolve as conexões intramatemática e extramatemática.

Vimos que o planejamento ganha importância como princípio da gestão da aula, pois além de permitir que o professor antecipe e reflita sobre as suas ações, também possibilita variar a sua organização didática diária, considerando a natureza dos objetos de conhecimento, dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, dos objetivos de desenvolvimento sustentável e da Matriz de Saberes. A seguir apresentamos a discussão sobre três aspectos relevantes que interferem diretamente no desenvolvimento da aula e que, de alguma maneira, podem auxiliar o professor em sua prática, referimo-nos à gestão democrática da aula, ao trabalho com agrupamentos produtivos e à organização de uma rotina de trabalho para o professor.

Professor, o material didático de apoio ao estudante e professor da Rede prevê o desenvolvimento de dois projetos (unidade 3 e unidade 5), ou seja, um para cada semestre. Leia os projetos previstos para o ano que você leciona, procure adequá-los ao seu planejamento semestral e/ou anual.

A gestão democrática da aula

A sala de aula, um ambiente propício à interação, cooperação, cidadania, respeito, igualdade e, principalmente, à aprendizagem, muitas vezes se apresenta como um verdadeiro espaço de conflitos, cabendo ao professor garantir a ordem nas relações entre professor e estudantes e entre estudantes e estudantes.

Professor, o que fazer quando o estudante apresenta um comportamento que interfere diretamente no desenvolvimento da aula? Você já passou por alguma situação semelhante? Pense nas atitudes que você tomou.

Diante dessas situações é preciso ter discernimento para lidar com a complexa heterogeneidade do grupo. Concentrar a manutenção da ordem somente na figura do professor pode tornar-se para os estudantes uma obrigação imposta e não incorporada. Nesse sentido, propomos o trabalho a partir da gestão democrática da aula.

Logo no início do ano é importante estabelecer alguns combinados com a turma. Os combinados se constituem princípios - ou regras, incluindo o contrato didático que deve ser estabelecido entre os próprios estudantes e entre os estudantes e o professor, para que a sala de aula se configure como um espaço onde as relações sociais sejam saudáveis, possibilitando um ambiente propício para o convívio e para o desenvolvimento das aprendizagens. Os combinados possuem naturezas diferentes: os combinados compartilhados com o grupo que podem ser feitos sob o ponto de vista da organização da classe, distribuição de materiais, formação de grupos, dentre outros; e os combinados institucionais que não podem ser negociáveis, como é o caso do estabelecimento de horários para início da aula ou da tolerância às agressões, sejam elas verbais ou mesmo físicas, para isso não há negociação.

O levantamento dos combinados pode ser um dos momentos planejados pelo professor em que a empatia e a colaboração são pauta para a reflexão.

Ao tomarem decisões conjuntas, os estudantes aprendem a trabalhar em grupo e respeitar princípios de convivência, isto é, exercitam a alteridade.

São aspectos fundamentais a serem trabalhados no decorrer de todo o ano, de forma explícita.

A gestão democrática da aula contribui para que o professor conduza melhor os momentos em que é necessário trabalhar coletivamente. Por exemplo: ao iniciar um assunto novo ou objeto de conhecimento ou identificar as dúvidas mais frequentes, sendo necessário esclarecê-las no coletivo. Em momentos expositivos como esses, o professor pode compartilhar o seu papel com os estudantes pedindo-lhes, por exemplo, para que socializem os seus registros sobre os problemas propostos e explicitem e argumentem sobre os procedimentos de resolução ou cálculos desenvolvidos para solucionar o problema. Aprender a ouvir o outro e respeitar a sua vez de falar são habilidades que devem ser desenvolvidas também nas aulas de Matemática. Iniciar com uma pesquisa sobre o que já sabem sobre o tema é sempre uma forma adequada de fazer a gestão do conhecimento.

A gestão democrática é um caminho que pode favorecer a interação e a troca entre os estudantes, retirando do professor o status de único detentor do saber. Se quisermos dar voz às crianças e adolescentes nas aulas de Matemática, é importante incentivá-los a socializar com o grupo suas ideias. Ao falar sobre o seu próprio raciocínio, cada um deles terá a oportunidade de rever e reorganizar o caminho percorrido para encontrar a resposta; poderá argumentar, compartilhar e comunicar hipóteses, conjecturas, dúvidas e convicções. O silêncio não favorece o espaço para falar e o professor tem a oportunidade de democratizar o acesso à construção do conhecimento matemático e dos saberes expressos na Matriz de Saberes do Currículo da Cidade.

Agrupamentos produtivos

Como devo organizar a turma para a realização de uma determinada atividade? Esta pergunta é feita com frequência pelo professor.

Somente o professor que conhece bem a sua turma sabe qual é o nível de conhecimento e a personalidade dos estudantes, o que permite agrupá-los para que a atividade seja mais produtiva. A organização da sala de aula por agrupamentos produtivos depende do objetivo de aprendizagem e da atividade que se pretende desenvolver. As atividades realizadas em duplas, trios ou grupos permitem que o professor circule mais na sala, fazendo registros e mapeando as dúvidas mais frequentes. Mas, para compor os agrupamentos, é fundamental que se pense em dois critérios: o primeiro diz respeito aos diferentes níveis de conhecimento dos estudantes que devem ser próximos e o outro se refere ao perfil das relações sociais dos integrantes que irão compor esse grupo.

Certamente na sua prática você constantemente reflete sobre a melhor organização dos estudantes na sala de aula.

Como você tem organizado os estudantes para o desenvolvimento das atividades? Quais critérios utiliza para esta organização? Esses critérios estão atrelados aos objetivos da aula, aos níveis de aprendizagem dos estudantes ou às suas características interpessoais?

O diagnóstico é um caminho para identificar os níveis de conhecimento dos estudantes e os seus estilos cognitivos. Os instrumentos diagnósticos permitem que o professor tenha mais clareza sobre os conhecimentos que cada estudante já possui, seus processos internos de aprendizagem e o que precisa ser aprendido. O acompanhamento das aprendizagens pode ser feito de várias formas, servindo-se de diferentes instrumentos como fichas de observação que permitam ao professor, por exemplo, ver a evolução da apropriação da escrita numérica ou mesmo a ampliação da ordem de grandeza do sistema de numeração decimal pelos estudantes ou a organização de um portfólio para observar se os estudantes se apropriaram dos significados de comparação e composição na resolução de problemas no campo aditivo. Assim, para cada objeto de conhecimento, o professor pode organizar um instrumento adequado para acompanhar o processo de aprendizagem dos estudantes e verificar os diferentes níveis entre eles para formar os agrupamentos produtivos, o que pode permitir também que os próprios estudantes acompanhem o avanço de seus conhecimentos.

> Mas o que fazer com os grupos que concluem as atividades propostas primeiro, antes que os outros? Essa situação acontece na sua turma? Que encaminhamentos você propõe quando isso acontece?

Por meio dos agrupamentos produtivos, as dúvidas que ocorrem durante a realização da atividade podem ser sanadas com os próprios companheiros de grupo ou discutidas no coletivo, se forem frequentes nos vários agrupamentos. É importante que o professor circule pelos grupos, fazendo intervenções mais pontuais, questionando procedimentos utilizados, fazendo novas perguntas, propiciando novas discussões entre os estudantes. O professor, ao andar pela classe, também pode perceber se há agrupamentos em que as discussões não estão acontecendo em torno da atividade proposta. Caso isso ocorra, é necessário a retomada do objetivo da atividade, recuperando o foco. A rotina da organização da turma em diferentes agrupamentos pode aos poucos tornar o espaço da sala de aula em um ambiente colaborativo, respeitoso e de confiança entre os estudantes, onde as dúvidas levantadas sejam objeto de reflexão e de aprendizagem.

Existem inúmeras possibilidades de encaminhamentos, uma delas é que os estudantes que concluem a atividade possam ajudar outros colegas que apresentam dificuldade na sua realização. É preciso deixar claro que eles podem ajudar, mas não dar a resposta pronta e nem fazer a atividade pelos colegas. Ajudar um colega de classe permite ao estudante se organizar para fazer perguntas, questionar os encaminhamentos feitos por outros, ajudar na indicação de um procedimento de cálculo ou mesmo na verificação de um resultado de um problema proposto e questionar a sua validade. Portanto, é um momento de aprendizagem que auxilia na ampliação do seu repertório de argumentação matemática. Outra possibilidade para lidar com a situação é que o professor tenha outras atividades organizadas para aqueles que terminaram mais rapidamente, como algum canto com livros ou jogos matemáticos já conhecidos pelos estudantes, de modo que o professor possa dedicar sua atenção àqueles que apresentam dificuldades.

> O professor também pode se deparar com perguntas feitas pelos estudantes que não haviam sido previstas no planejamento. O que fazer nessa situação?.

Quando há situações que envolvem questionamentos dos estudantes o professor pode anotar a dúvida e dizer que num outro momento irá retomá-la. Verifique a possibilidade de conversar sobre a dúvida do estudante com outro professor ou com a coordenação pedagógica, isso ajuda a levantar mais informações, ter mais clareza e dar uma devolutiva adequada à faixa etária e com maior confiança. Um exemplo dessa parceria entre docentes pode ocorrer principalmente na docência compartilhada do Ciclo Interdisciplinar. Outro ponto importante é fazer um registro que possa ser analisado posteriormente, verificando, por exemplo, se essa dúvida poderia ter sido antecipada no planejamento, além de considerar nas reflexões o que deu certo e o que não foi tão bom, pensando nos motivos que o levaram àquele resultado.

Rotina de trabalho para o professor

A rotina de trabalho para o professor nada mais é que a organização do tempo didático, pensada com antecedência no planejamento semanal ou quinzenal, de maneira a otimizar as aprendizagens dos estudantes. Nessa organização devem ser incluídos além dos objetos de conhecimentos, os procedimentos matemáticos que permitam a ampliação dos conhecimentos dos estudantes de representar, relacionar e operar, resolver problemas, investigar e comunicar as ideias matemáticas que estão desenvolvendo ao longo das atividades planejadas.

Nesse trabalho de organização do tempo didático estarão presentes:

- A leitura e escrita de números de diferentes grandezas e de diferentes campos numéricos;
- O trabalho com a resolução de problemas no campo aditivo e multiplicativo;
- O trabalho com diferentes tipos de cálculo: mental, escrito, por arredondamento e aproximações, incluindo a sistematização de algoritmos envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação;
- O desenvolvimento de atividades com as unidades de medida: tempo, comprimento, massa, volume, área, perímetro, entre outras;
- O trabalho com a geometria, incluindo atividades que possam ampliar o conhecimento espacial dos estudantes, tanto no que se refere à movimentação e localização de pessoas no espaço, quanto à identificação das características das figuras geométricas;
- O trabalho com a álgebra de maneira que os estudantes possam desenvolver o pensamento algébrico a partir de modelos matemáticos que permitam a compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas;

- O desenvolvimento de atividades que ampliem o pensamento estatístico e probabilístico dos estudantes, de maneira que possam organizar pesquisas, coletando dados, organizando-os, analisando-os e produzindo textos que mostrem a sua posição em relação ao que analisaram, além de estudarem os fenômenos envolvendo incerteza, utilizando para isto ferramentas do cálculo matemático.

A seguir apresentaremos uma sugestão de rotina para uma semana de trabalho para os professores do Ciclo de Alfabetização e outra para os professores do Ciclo Interdisciplinar como apoio para que possam organizar suas próprias rotinas, pensando no contexto da escola, na sua turma. Lembrando que durante a semana serão contemplados alguns objetos de conhecimentos e em outras serão mantidos alguns e incluídos outros de maneira que, durante o ano, os estudantes tenham a possibilidade de vivenciar diferentes situações matemáticas e estabelecer relações entre elas.

Sugestão de rotina para o professor do 2º ano do Ciclo de Alfabetização

Aula	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feita
1ª			**Matemática** Unidades de tempo: uso do calendário		
2ª	**Matemática** Leitura e escrita de números relacionadas ao próprio estudante				
3ª		**Matemática** Resolução de problemas envolvendo o campo aditivo			
4ª					**Matemática** Localização das salas de aula da escola
5ª				**Matemática** Contagem de coleções fixas	

Sugestão de rotina para o professor do 6º ano do Ciclo Interdisciplinar

Aula	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feita
1ª	**Matemática** Resolver problemas do campo aditivo e multiplicativo envolvendo Números Naturais				
2ª		**Matemática** Cálculo de operações envolvendo a multiplicação e a divisão de Números Naturais			
3ª			**Matemática** Leitura e escrita de números, incluindo o arredondamento com vírgula		
4ª				**Matemática** Localização de pessoas e figuras no 1º quadrante do plano cartesiano	
5ª					**Matemática** Sistematização da escrita de números, utilizando o quadro de classes e ordens

E você, Professor, concorda com a afirmação de Tardif (2010)?

Por fim, ressaltamos que as discussões apresentadas aqui nos fazem refletir que “A ordem na sala de aula é certamente condicionada pela organização física e social da escola e das salas de aula, mas é ao mesmo tempo uma ordem construída pela ação do professor em interação com os alunos” (TARDIF, 2010, p. 221).

Saiba mais sobre a temática apreciando a leitura do texto “Cotidiano da sala de aula e gestão do professor de matemática” do professor Vinício de Macedo Santos
https://www.google.com.br/

Foto: Daniel Cunha - Núcleo de Foto e Vídeo Educação / CM / COPED / SME

Conexões Extramatemática

Introdução

Conforme o texto introdutório do Currículo da Cidade, os desafios da sociedade moderna trazem aos educadores a missão de organizar um currículo que atenda a princípios e valores éticos, políticos e estéticos (BRASIL, 2013, p. 107-108) de maneira que os estudantes possam atuar socialmente para a construção de uma sociedade mais justa e democrática. Um currículo que permita viver percursos interessantes e ricos de formação para os estudantes brasileiros.

Tradicionalmente, a organização curricular tem sido estanque. Historicamente e ainda nos dias de hoje, o currículo é organizado por disciplinas justapostas sem nenhum tipo de articulação, o que leva a uma formação fragmentada, com saberes dissociados entre si e distantes das necessidades da sociedade.

Estudos e pesquisas desenvolvidas no final do século XX, apontadas por Pires (2013), mostram a preocupação de romper com as barreiras disciplinares, sem deixar de lado o caráter disciplinar do conhecimento científico e de outras áreas do conhecimento, mas contemplando-os numa compreensão global, articulando os saberes disciplinares ao conjunto de saberes científicos e de outras áreas do conhecimento. Incluam-se aí as tecnologias digitais, para a compreensão da problemática ambiental e para o desenvolvimento de uma visão articulada do ser humano no seu meio natural e social, com vistas à transformação da sociedade. A proposta de "um desenho curricular composto por uma pluralidade de pontos, ligados entre si por uma variedade de ramificações e caminhos, de tal forma que nenhum ponto (ou caminho) seja privilegiado em relação a outro, nem unicamente subordinado a qualquer um deles". (PIRES, 2013, p.256).

Antes de continuar a leitura do texto, reflita:

Para desmistificar a ideia de que a Matemática é uma disciplina sem utilidade prática, pense em como podemos inseri-la no currículo do Ensino Fundamental de maneira articulada

Com essa perspectiva, o Currículo da Cidade da área de Matemática está organizado a partir de Eixos Estruturantes definidos em função da natureza e especificidade da área de Matemática (Números, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, e Álgebra) e de Eixos Articuladores que permitem estabelecer relações tanto intramatemática como extramatemática (Jogos e Brincadeiras, Processos Matemáticos e Conexões Extramatemática).

A ideia é que a partir de uma "contextualização sociocultural" os estudantes possam conceber a Matemática como conhecimento sistematizado para compreender, interpretar e intervir na realidade, e, ainda, recorrer ao uso da tecnologia para a compreensão do mundo que nos cerca.

Um dos pressupostos do Currículo da Cidade, referente à Matemática, é focar o ensino com significados para os estudantes, permitindo-lhes o estabelecimento de conexões extramatemática que possibilitem ligações da Matemática com os problemas do cotidiano, com a tecnologia, com o ambiente social, com a perspectiva ambiental, com o mundo do trabalho, entre outras possibilidades; além das conexões intramatemática que exploram os seus próprios objetos do conhecimento, ou seja, olhando para os conteúdos matemáticos, mas estabelecendo intersecções e relações entre eles, como é o caso da relação entre geometria e medidas, por exemplo, quando se estuda perímetro e área.

Tais preocupações, no processo de organização e desenvolvimento curricular em Matemática, evidenciaram algumas interfaces dessa área, para o Currículo da Cidade, que merecem especial atenção. Essas interfaces, propostas no documento curricular, baseadas em uma educação para o desenvolvimento sustentável, apoiam-se no documento Educação para os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, publicado em 2017 pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. Neste documento, a UNESCO, no âmbito da Agenda 2030, aspira um movimento global para erradicar a pobreza em todo o mundo - até essa data. Para alcançar essa meta, apresenta os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Para você, qual a importância de articular o ensino de Matemática aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável?

Educação para os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável – ODS

O documento Educação Para o Desenvolvimento Sustentável, em sua introdução, discute a finalidade da Agenda 2030 e apresenta os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável - ODS que descrevem os principais desafios para o desenvolvimento da humanidade. A principal finalidade da Agenda 2030 é garantir uma vida sustentável, pacífica, próspera e equitativa para todos os povos da Terra no momento atual e também no futuro. Os 17 ODS estabelecem limites ambientais e definem restrições importantes para o uso de recursos naturais de todas as ordens. Reiteram que a erradicação da pobreza deve caminhar junto com o desenvolvimento econômico. Abordam um conjunto de necessidades sociais tais como educação, saúde, proteção ambiental, oportunidades de emprego. Combatem as mudanças climáticas e promovem a proteção ambiental. Apontam as principais causas sistêmicas que interferem no desenvolvimento sustentável, como a desigualdade, os padrões de consumo insustentáveis, a falta de capacidade institucional e a degradação ambiental.

Acesse o link do documento e faça a leitura na íntegra dos 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável. Disponível em: http://unesdoc.unesco.org/images/0025/002521/252197POR.pdf

Analise e reflita sobre os principais aspectos descritos no documento.

A seguir, está relacionada a síntese dos 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Quadro 1 – Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

1	Erradicação da pobreza	Acabar com a pobreza em todas as suas formas e lugares.
2	Fome zero e agricultura sustentável	Acabar com a fome, alcançar a segurança alimentar e a melhoria da nutrição, promover a agricultura sustentável.
3	Saúde e Bem-Estar	Assegurar uma vida saudável e promover o bem-estar para todos em todas as idades.
4	Educação de Qualidade	Assegurar a educação inclusiva e equitativa de qualidade e promover oportunidades de aprendizagem ao longo da vida para todos.
5	Igualdade de gênero	Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.
6	Água potável e Saneamento	Assegurar a disponibilidade e gestão sustentável da água e saneamento para todos.
7	Energia limpa e acessível	Assegurar o acesso confiável, sustentável e moderno de energia para todos a preço acessível.

8	Trabalho decente e crescimento econômico	Promover o crescimento econômico sustentado, inclusivo e sustentável, emprego pleno e produtivo e trabalho decente para todos.
9	Indústria, inovação e infraestrutura	Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.
10	Redução das desigualdades	Reduzir as desigualdades dentro dos países e entre eles.
11	Cidades e comunidades sustentáveis	Tornar as cidades e os assentamentos humanos inclusivos, seguros, resilientes e sustentáveis.
12	Consumo e produção responsáveis	Assegurar padrões de produção e consumo sustentável.
13	Ação contra mudança global do clima	Tomar medidas urgentes para combater a mudança do clima e seus impactos.
14	Vida na água	Conservar e usar sustentavelmente os mares, os oceanos e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.
15	Vida Terrestre	Proteger, recuperar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável florestas, combater a desertificação, deter e reverter a degradação da terra e deter a perda da biodiversidade.
16	Paz, justiça e instituições eficazes	Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, proporcionar o acesso à justiça para todas e todos e construir instituições eficazes, responsáveis e inclusivas em todos os níveis.
17	Parcerias e meios de implementação	Fortalecer os meios de implementação e revitalizar parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte: Educação para os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, 2017, p. 6

Segundo o documento citado, os ODS permitem uma Educação transformadora. Neste sentido, especificamente em Matemática, não se discute apenas os objetos de conhecimento da área, mas se busca integrar conhecimentos como mudanças climáticas, erradicação da pobreza, entre outros, de maneira que a Matemática possa ajudar a compreender melhor, por exemplo, as mudanças do clima, a preservação dos recursos naturais, a preservação da fauna e da flora entre outros. Neste segmento, eles também possibilitam contextos de ensino e aprendizagem interativos e centrados nos interesses dos estudantes, possibilitando a discussão de temas atuais da sociedade. Além disso, propõem mudanças de foco no ensino que requerem uma postura por parte do professor orientada para a ação, que apoie a aprendizagem e que permita aos estudantes a participação e a colaboração na busca de solução de problemas da realidade, trazendo uma integração entre as aprendizagens extramatemática e intramatemática, aproximando as aprendizagens formais e não formais. Sobre essas práticas, entende-se que essa abordagem pedagógica torna possível o desenvolvimento dos conhecimentos que promovam o desenvolvimento sustentável.

Principais competências transversais para alcançar os ODS

No documento Educação para o Desenvolvimento Sustentável há um consenso de que os cidadãos, para desenvolver a sustentabilidade, precisam ter adquirido/desenvolvido determinadas competências que lhes permitam participar de forma construtiva e responsável na sociedade. Essas competências descrevem atributos específicos que os cidadãos precisam para atuarem e se auto-organizarem em várias situações, das mais simples às mais complexas. Elas incluem elementos afetivos, cognitivos e motivacionais. O documento destaca que essas competências são uma interação entre conhecimentos, capacidades, habilidades, motivações e disposições afetivas. Como já se sabe, não é possível ensinar competências, elas devem ser desenvolvidas pelos estudantes, durante a ação, com base na experiência e reflexão.

O documento denomina competências-chave aquelas que representam competências transversais que são necessárias para todos os estudantes de todas as idades, em todo o mundo, e que são desenvolvidas em diferentes níveis, de acordo com a idade. Elas são indispensáveis para todos os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável - ODS e capacitam os indivíduos para relacionar os diferentes ODS uns com os outros. Portanto, o documento apresenta um quadro com as competências-chave para a sustentabilidade, transcrito a seguir:

Quadro 2 – Competências-chave para o desenvolvimento da sustentabilidade

Competência sistêmica	Habilidade de reconhecer e compreender relações; analisar sistemas complexos; pensar como os sistemas são incorporados nos diferentes domínios e diferentes escalas e lidar com as incertezas.
Competência antecipatória	Habilidade de compreender e avaliar vários futuros: possíveis, prováveis e desejáveis; criar suas próprias visões para o futuro; aplicar o princípio da precaução; avaliar as consequências das ações; lidar com riscos e mudanças.
Competência normativa	Habilidade de entender e refletir sobre as normas e valores que fundamentam as ações de pessoas e negociar valores, princípios e objetivos e metas de sustentabilidade em um contexto de conflitos de interesse e concessões, conhecimento incerto e contradições.
Competência estratégica	Habilidade de desenvolver e implementar coletivamente ações inovadoras que promovam a sustentabilidade em nível local e em contextos mais amplos
Competência de colaboração	Habilidade de aprender com os outros; compreender e respeitar as necessidades, as perspectivas e as ações de outras pessoas (empatia); entender, relacionar e ser sensível aos outros (liderança empática); lidar com conflitos em grupo; facilitar a colaboração e a participação na resolução de problemas.
Competência de pensamento crítico	Habilidade de questionar normas, práticas e opiniões; refletir sobre os próprios valores, percepções e ações e tomar uma posição no discurso de sustentabilidade.
Competência do autoconhecimento	Habilidade de refletir sobre o próprio papel na comunidade local e na sociedade (global); avaliar continuamente e motivar ainda mais as próprias ações; lidar com os próprios sentimentos e desejos.
Competência de resolução integrada de problemas	Habilidade de aplicar diferentes marcos de resolução de problemas para problemas complexos de sustentabilidade e desenvolver opções de solução viáveis, inclusivas e equitativas que promovam o desenvolvimento sustentável, integrando as competências mencionadas anteriormente.

Fonte: UNESCO, Educação para os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, 2017, p.10

Objetivos específicos de aprendizagem para os ODS

Para cada um dos 17 ODS, apresentados no documento Educação para o Desenvolvimento Sustentável – EDS, há indicações de objetivos de aprendizagem no campo cognitivo, socioemocional e comportamental, conforme descritos:

- O **campo cognitivo** compreende conhecimentos e habilidades de pensamentos necessários para compreender melhor os ODS e os desafios para alcançá-los.
- O **campo socioemocional** inclui habilidades sociais que permitem que os estudantes colaborem, negociem e se comuniquem, para promover os ODS, bem como habilidades de autorreflexão, valores, atitudes e motivações que possibilitem o desenvolvimento dos estudantes.
- O **campo comportamental** descreve competências de ação baseadas nos princípios éticos desenvolvidos integradamente com os demais campos.

Além disso, são delineados temas indicativos e abordagens pedagógicas para cada ODS.

O documento curricular de Matemática contempla dois objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para cada ano de escolaridade e, com base nos ODS, a perspectiva é que os objetivos de aprendizagem e as competências-chave sejam trabalhados em conjunto, de maneira inter-relacional. Sendo assim, eles estarão melhor explicitados no material de apoio do estudante, mais especificamente nas unidades 3 e 5.

> Mas, afinal, como o Currículo da Cidade propõe a articulação dos ODS ao ensino da Matemática?

No material destinado aos estudantes e professores, são sugeridos dois projetos para consecução dos objetivos de aprendizagem, sendo um para cada semestre letivo. Cabe destacar que os ODS não precisam, necessariamente, ser aplicados apenas no projeto temático, mas, para além disso, podem ser inseridos nas mais variadas atividades matemáticas. Desta forma, é importante ressaltar que esses objetivos não devem ser vistos isolados das competências-chave de sustentabilidade que apoiarão a transição para um mundo sustentável.

Contextualização

A palavra contexto tem um significado trivial no uso cotidiano. Certamente você já viu o uso dessa palavra relacionada a uma dada situação, por exemplo: "Em que contexto você está falando? Qual o contexto da situação vivenciada pelo trabalhador"?

O que significa contextualização? Pense sobre o assunto e continue a leitura do texto.

O contexto é quase um "pano de fundo" econômico, social, geográfico e histórico em que uma situação acontece, ou seja, para uma mesma situação pode haver diferentes contextos que lhe dão sentido. O contexto pode ser representado por um conjunto de elementos significativos e representativos que possibilitam compreender dada situação. Portanto, conhecer o contexto de uma situação significa ter melhores condições de se apropriar dela e resolvê-la. Esse conceito é muito importante e de muita utilização na sociedade. A contribuição de outras disciplinas é fundamental para que superemos a visão estanque de currículo com disciplinas justapostas sem nenhum tipo de articulação e que leva a uma formação fragmentada.

E na Matemática? Como a contextualização é entendida e como é utilizada? Reflita sobre isso e continue a leitura.

Um dos primeiros documentos curriculares a referir-se ao contexto, numa atividade matemática, foi o denominado Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (2000). O documento afirma que a característica fundamental da contextualização é a relação entre sujeito e objeto de conhecimento. Explicita que o contexto permite transformar o estudante em um sujeito ativo na construção do seu próprio conhecimento.

A contextualização possibilita ao estudante uma aprendizagem significativa do conteúdo ensinado e estabelece entre o estudante e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização busca o resgate de outras áreas do conhecimento, além de aspectos presentes na vida pessoal, econômica, social e cultural do estudante. A contextualização permite ao estudante mobilizar competências cognitivas já construídas ou em construção.

Os PCNEM (2000) recomendam a contextualização como princípio de organização curricular com a finalidade de facilitar a aplicação da experiência escolar para a compreensão da experiência pessoal em níveis sistemáticos e abstratos e o uso da experiência pessoal para facilitar o conhecimento dos objetos de aprendizagem previstos para serem trabalhados na escola, ou seja, há uma relação nos dois sentidos, de mão dupla, entre aspectos da experiência pessoal e dos objetos de aprendizagem. O documento destaca que em ambas as direções estão em jogo competências cognitivas básicas, como o raciocínio abstrato, a capacidade de compreensão de situações novas, entre outras.

O documento entende a contextualização como um recurso pedagógico importante para a construção de conhecimentos.

Outro ponto importante quando se pensa no contexto para o desenvolvimento de atividades matemáticas é a interdisciplinaridade. Esse aspecto será discutido a seguir.

Interdisciplinaridade

A interação entre duas ou mais áreas do conhecimento para buscar respostas a perguntas comuns é denominada como interdisciplinaridade (FAZENDA, 2008, p. 96). Essa articulação não se dá apenas por temas comuns ou que têm alguma relação, mas pode ser uma interação relativa à terminologia, aos procedimentos para solucionar uma determinada tarefa (modelagem, investigação, resolução de problemas), ou a simbologia comum a algumas áreas do conhecimento, etc. Outros especialistas consideram a interdisciplinaridade como uma questão de atitude, que pressupõe uma postura única mediante os fatos a serem analisados.

Fazenda (1979, p. 23) considera que o conhecimento interdisciplinar abre possibilidades de interação e não as fecha. Segundo a autora, "deve ser uma lógica de descoberta, uma abertura recíproca, uma comunicação entre domínios do saber, uma fecundação mútua e não um formalismo que neutraliza todas as significações, fechando todas as possibilidades".

A autora destaca algumas vantagens do enfoque interdisciplinar, como:

- possibilita uma certa identificação entre o vivido e o estudado, desde que o vivido resulte da inter-relação de múltiplas e variadas experiências. A possibilidade de situar-se na sociedade atual, de compreender e criticar as diferentes informações que chegam diariamente só pode acontecer na superação das barreiras que surgem entre as disciplinas;
- apoia-se no aporte de várias disciplinas, além de possibilitar adaptações a uma inevitável mobilidade de emprego, criando até possibilidades de carreiras em novos domínios;
- o exercício de uma educação permanente, ao longo da vida, de forma a prolongar a formação geral e profissional, terá melhores condições se o processo educativo inicial focaliza uma prática interdisciplinar;
- a recuperação da unidade humana por meio da passagem de uma subjetividade para uma intersubjetividade foca na ideia de Cultura (formação do homem total), no papel da escola e no papel do homem. Por intersubjetividade, a autora compreende o ultrapassar de

> um estágio subjetivo, em que as limitações são camufladas, a um estágio compreensível, em que se passa a aceitar e incorporar as experiências dos outros, a ver na experiência do outro a complementação de sua própria.

Segundo Machado (1995) a fragmentação crescente dos objetos do conhecimento nas diferentes áreas, sem a visão de conjunto do saber instituído, tem se revelado crescentemente desorientadora, conduzindo a um fechamento no discurso e constituindo-se como um obstáculo na comunicação e na ação. Além da fragmentação, o autor destaca que parece cada vez mais difícil o enquadramento de fenômenos que ocorrem fora da escola no âmbito de uma única disciplina. O autor completa que cada disciplina quando isolada expressa pouco e interessa apenas a especialistas. Para ele, o essencial para a escola é analisar a interdependência entre as disciplinas, as formas como elas se articulam, a hierarquia que se estabelece entre elas, a influência dessa hierarquização nos currículos.

A interdisciplinaridade, na perspectiva do currículo escolar, não aponta para a criação de novas disciplinas, mas de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema, ou seja, assume uma função instrumental. Permite recorrer a um conhecimento útil e prático para resolver problemas sociais atuais.

Nesta perspectiva o Currículo da Cidade está organizado por disciplinas, mas propõe uma abordagem observando as relações entre elas, relacionando-as aos problemas da sociedade a partir dos princípios norteadores dos ODS e da Matriz de Saberes, trazendo para a discussão do currículo princípios como a autonomia, a capacidade de resolver problemas, entre outros. Em especial, na área de Matemática, as opções por Eixos Estruturantes e Eixos Articuladores estão embasadas nos estudos de Machado (1995) e de Pires (2001) que discutem a concepção do conhecimento como rede de significações.

Assim, com base nos conceitos de interdisciplinaridade e de contextualização, pretende-se superar uma tendência muito forte, em todos os níveis de ensino, de se ensinar de forma segmentada e fragmentada, sem desenvolver a compreensão dos múltiplos conhecimentos que interagem.

Um dos caminhos apontados no Currículo da Cidade - Matemática para o uso da contextualização e da interdisciplinaridade está no trabalho com Projetos Temáticos apontados no Eixo Conexões Extramatemática.

A preocupação interdisciplinar é a proposição de um problema que une as diferentes áreas do saber na busca de soluções. Enfim, a pergunta é que define o grau e modalidade da interdisciplinaridade. Projetos temáticos oriundos de marcantes contextos da realidade escolar e das grandes questões dos ODS serão uma resposta à questão da fragmentação do conhecimento, que não é apenas um equívoco curricular-escolar, mas também um desafio às propostas de construção de um novo mundo mais justo e solidário.

O trabalho com Projetos Temáticos

Boutinet (2002) é um dos autores que trabalha com Projetos Temáticos. Ele foi o escolhido para embasar teoricamente o trabalho com Projetos no currículo de Matemática. Em seu livro "Antropologia do Projeto", o autor afirma que há muitas maneiras de elaborar um Projeto. Ele destaca três etapas essenciais na elaboração de um Projeto: **a análise de situação (do tema), o esboço de um projeto possível e a estratégia** prevista para desenvolvê-lo. Essas três etapas visam à elaboração e preparam para a realização do Projeto.

Na elaboração de um Projeto, a primeira fase é a **análise do tema**. Nessa etapa, que necessita de certo tempo, identificam-se as diferentes finalidades a partir das quais o Projeto será concebido e organizado.

A partir dessa análise é possível definir **o esboço do projeto** que deve buscar um mínimo de coerência entre as finalidades e sua pertinência em relação ao tema analisado.

Após a formulação do esboço do Projeto, escolhe-se uma estratégia adequada que visa a sua realização, seu desenvolvimento.

Uma vez concluídas essas três etapas da elaboração de um Projeto, passa-se para a etapa de realização, que também se divide em três partes essenciais: **planejamento, gestão e avaliação**.

A fase de **planejamento** se relaciona à gestão do tempo que se torna essencial para o desenvolvimento do Projeto. Envolve também decisões sobre o produto, como será organizado, que situações e linguagem vai usar etc.

Os Projetos oferecem contextos para que conceitos e procedimentos matemáticos tenham sentido. Permitem uma organização flexível do tempo que depende do objetivo a alcançar, podendo ocupar somente alguns dias, várias semanas ou meses.

Os Projetos de maior duração de tempo permitem compartilhar com os estudantes desde o planejamento das tarefas até sua distribuição e organização. O ideal é partir da data fixada para que o produto final esteja pronto. A partir dessa data é possível fazer um calendário retroativo e definir as etapas necessárias, as responsabilidades de cada estudante e de cada grupo, as datas que deverão ser respeitadas para que os objetivos sejam alcançados no prazo.

O trabalho com projetos propicia o desenvolvimento de diferentes saberes pelo estudante.

O pensamento científico, crítico e criativo permite o trabalho a partir de procedimentos organizados que usam a investigação e geram produção de conhecimento.

A responsabilidade e participação leva-o a perceber-se como agente transformador que precisa tomar decisões éticas para si e os demais colegas.

A autonomia e determinação faz com que planeje projetos (pessoais e coletivos) e persevere no alcance dos objetivos.

Tais aprendizagens só se efetivarão se os professores organizarem, de forma intencional, atividades em que estejam presentes e possam ser objeto de reflexão.

O que está em jogo aqui é muito mais que a aprendizagem do conteúdo.

A gestão do Projeto envolve, além do tempo, a maneira de organizar os estudantes, em grupos, em duplas; as estratégias de pesquisa, como irão a campo; como os dados serão coletados e organizados, se na escola ou na comunidade, como serão tratados e apresentados; como será o produto, em forma de cartazes, de apresentação, de teatro ou música; como o produto será socializado etc. Esta mesma concepção é utilizada na organização do TCA (Trabalho Colaborativo de Autoria), ou seja, de levantar um problema, agrupar os estudantes, coletar os dados e organizá-los, analisá-los e verificar se é possível encontrar uma solução para o problema.

Nessa fase é importante definir as responsabilidades de cada um, a verificação de recursos que serão necessários para o desenvolvimento do Projeto (gravador, câmera fotográfica, filmadora, etc.) e o desenvolvimento e apresentação do produto final. A apresentação pode ser feita para os estudantes da classe, para os demais colegas da escola, ou para a comunidade.

Os Projetos devem sempre incluir uma avaliação que não é do produto, mas do processo que o professor realiza junto com os estudantes, a partir de questões como: o que fez falta? O que poderia ter ficado melhor? O que aprendemos com o projeto?

É importante também uma autoavaliação por parte dos estudantes observando aspectos como: O grupo conseguiu se organizar bem para a realização do projeto? Qual a minha participação no grupo? Em que etapas me envolvi mais? O grupo foi capaz de tomar decisões e dar encaminhamentos adequados a elas? Como participei dessa fase? O grupo foi capaz de buscar informações e utilizá-las? E minha participação contribuiu para a busca das informações e seu uso? Que conhecimentos matemáticos foram necessários para o desenvolvimento do projeto? O que preciso melhorar?

Feita a avaliação pelo professor e a autoavaliação, é interessante confrontar os resultados e estabelecer novas metas.

Durante o desenvolvimento do projeto, o professor deve manter um clima de confiança no trabalho dos estudantes, com liberdade e descontração, incentivando a participação e a criatividade individual e coletiva. Assim, é possível obter resultados satisfatórios em relação às escolhas e ao aprendizado de Matemática.

Retome os objetivos de aprendizagem do Currículo da Cidade – Matemática no Eixo Conexões Extramatemática e analise os temas propostos para o desenvolvimento de projetos para o(s) ano(s) que você leciona.

Foto: Paula Letícia - Núcleo de Foto e Vídeo Educação / CM / COPED / SME

Jogos e Brincadeiras

Introdução

Documentos curriculares recentes revelam que os jogos e brincadeiras têm se constituído de forma dinâmica e desafiadora como contextos para a resolução de problemas, pois são atrativos e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Dessa forma, os jogos e brincadeiras ocupam um lugar de destaque na educação de crianças e jovens, por serem considerados como atividades inseridas em suas vivências, o que possibilita que eles conheçam o mundo que as cerca, articulem a realidade e a fantasia, o conhecimento e a emoção, o individual e o grupal.

A **brincadeira** pode ser definida como uma ação que a criança desempenha ao concretizar regras, ao mergulhar em uma atividade lúdica, entretanto não se pode confundi-la com o jogo, de certa forma, ela deve ser explorada e incentivada, não imposta, a fim de garantir o aprendizado das crianças.

Nas aulas de Matemática, as brincadeiras podem ser de caráter pedagógico, desenvolvidas com a intenção de provocar a aprendizagem, de incentivar a construção de conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento de habilidades.

Notadamente, o uso das brincadeiras é frequente no Ciclo de Alfabetização. Nesse período, as crianças começam a praticar brincadeiras coletivas com regras, nas quais têm de se ajustar às restrições de movimentos e interesses pessoais e coletivos. E é por meio dessas brincadeiras que as crianças desenvolvem algumas capacidades importantes, tais como a atenção, a memória, a imaginação, concentração, interpretação, argumentação, organização, entre outras.

O documento curricular propõe o jogo com dupla finalidade, pois, em alguns momentos, o jogo se apresenta como estratégia para desenvolver um determinado objetivo de aprendizagem e desenvolvimento, em outros, como objeto em si, para desenvolver estratégias ou mesmo para averiguar conhecimentos, como diagnóstico ou avaliação, por exemplo.

Os **jogos** permitem aos estudantes apropriar-se de conhecimentos, buscar estratégias e desenvolver a autonomia, a vivência de valores, o cumprimento de normas etc. Além disso, envolvem os estudantes em sua plenitude, nos planos corporal, afetivo, cognitivo, cultural, social, entre outros. Em se tratando do ensino de Matemática, o professor, ao incentivar o jogo nas aulas, pode favorecer a aproximação dos estudantes com o conhecimento matemático, promovendo situações de resolução de problemas. Assim, quando usados de forma planejada, os jogos possibilitam o acompanhamento e a compreensão dos caminhos percorridos para se chegar a um dado resultado ou objetivo.

Jogos de estratégia e jogos de conhecimento

Corbalán (1996) classifica os jogos em Matemática de dois modos: por aspectos externos ou por aspectos internos. O autor defende a classificação por aspectos internos ao próprio jogo, no processo de ensino e aprendizagem. Nessa classificação, aborda o objeto do jogo e o seu lugar ou momento no processo de ensino e aprendizagem.

O autor destaca que quando os jogos abordam como objeto um tema da Matemática, tanto conceitual como procedimental, eles são denominados de "jogos de conhecimento". Ao abordarem as possibilidades de se criar estratégias (para vencer ou não perder), são chamados "jogos de estratégia" (CORBALÁN, 1996, p.32).

O jogo de estratégia é muito importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois, nesse tipo de jogo, os estudantes buscam táticas para ganhar, partem da situação real e não da repetição de modelos de procedimentos já vivenciados. A habilidade dos jogadores na tomada de decisões supera a sorte como fator de determinação do vencedor. Assim, ele se difere de outros tipos de jogos pelo baixo grau de aleatoriedade. Em alguns jogos, como o de damas e o xadrez, os jogadores têm o mesmo conhecimento dos elementos e das regras do jogo, mas precisam de estratégias individuais para jogar e vencer.

Quanto ao lugar ou momento que os jogos de conhecimento ocupam no processo de ensino e aprendizagem, o autor classifica como jogos "pré-instrucionais", que podem ser usados como diagnóstico para iniciar uma atividade; "co-instrucionais", que são utilizados paralelamente à apresentação de uma noção matemática e "pós-instrucionais", que podem ser empregados como revisão de noções já trabalhadas.

No Currículo da Cidade de Matemática, no Eixo Articulador de Jogos e Brincadeiras, há indicações de jogos de conhecimento e de jogos de estratégia usando a concepção de Grando (2015).

A autora discute o uso de jogos em sala de aula e distingue dois tipos de jogos: um em que o professor, ao planejar um determinado conteúdo, cria ou busca algum jogo já existente com o objetivo de ensinar Matemática. Em outras situações, o professor busca jogos de entretenimento, que foram criados com essa finalidade e planeja uma ação intencional, com o propósito de explorar a Matemática a partir desse jogo, que dê sentido à estratégia do jogo.

A autora considera que o jogo, explorado dessa última maneira com "conteúdo de ensino". Destaca ainda que esse tipo de jogo desperta mais o interesse dos estudantes porque é um jogo de entretenimento que faz parte de uma cultura lúdica.

Esses jogos, na maioria das vezes, são estratégicos e possibilitam a construção de procedimentos para vencer, permitem ainda um trabalho pedagógico na perspectiva da resolução de problemas. Quando trabalhado nessa perspectiva esses jogos promovem o desenvolvimento de investigações, ou seja, o estudante levanta hipóteses, problematiza, elabora estratégias e as analisa com a finalidade de vencer o jogo, e por fim, as valida quando faz a jogada. O jogo é determinado por regras, em que o sujeito busca, a todo momento, elaborar estratégias e procedimentos para vencer.

Segundo Corbalán (1996), os jogos de conhecimento se dividem em três grandes grupos: jogos numéricos, jogos geométricos e jogos de probabilidade. Embora um mesmo jogo possa envolver esses três tipos, nomeá-los por meio de objetos de conhecimento é importante para que o professor os organize e decida, da melhor forma, qual sua localização em relação ao currículo.

Nesse contexto, um bom jogo deve ter poucas regras, de forma clara e precisa, para não desviar o interesse do estudante. O autor também destaca que um bom jogo deve ser de pequena duração, para que os estudantes mantenham o interesse e, se for possível, antecipem os resultados.

Jogos computacionais

Nos dias atuais, não podemos deixar de salientar a importância da utilização dos jogos computacionais na aprendizagem matemática dos estudantes, pois apresentam muitos desafios, principalmente se os jogos forem conteúdos de ensino, conforme já mencionado anteriormente neste texto e no documento curricular de Matemática. Ou poderíamos dizer que a Matemática pode ser explorada a partir de jogos que evidenciam os conteúdos matemáticos possíveis de serem trabalhados.

O jogo computacional permite a tomada rápida de decisões e, nesse caso, as estimativas e aproximações são mais importantes do que o cálculo exato. De fato, essa é uma habilidade que a maioria dos jogos computacionais possibilita aos estudantes, justificando sua utilização na escola. Outras habilidades e formas de compreensão de um determinado problema matemático podem ser exploradas com os jogos computacionais.

Momentos de intervenções pedagógicas com o uso de jogos

Grando (2010) define alguns momentos de intervenção pedagógica a partir dos jogos para a aprendizagem matemática que possibilitam reflexões, sistematizações e conceituações dessa área.

1° Momento: familiarização dos estudantes com o material do jogo

Nesse momento, os estudantes entram em contato com o material do jogo e estabelecem analogias com os jogos já conhecidos.

2° Momento: reconhecimento das regras

As regras do jogo precisam ser reconhecidas pelos estudantes a partir de explicações do professor ou lidas pelos estudantes ou, ainda, por meio da realização de simulações de partidas, nas quais o professor pode jogar com um estudante que já conhecia o jogo, enquanto os demais tentam identificar as regularidades nas jogadas e as regras.

3° Momento: o "jogo pelo jogo": jogar para garantir regras

Este é o momento do jogo espontâneo, quando o estudante joga para garantir a compreensão das regras. Neste momento, podem ser exploradas algumas noções matemáticas envolvidas no jogo.

4° Momento: intervenção pedagógica verbal

Os estudantes jogam contando com as intervenções verbais do professor durante o jogo. Caracteriza-se por questionamentos e observações realizadas pelo professor para provocar os estudantes a analisarem suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de "jogadas erradas", etc.).

5° Momento: registro do jogo

O registro pode acontecer dependendo da natureza do jogo e dos objetivos. O registro dos pontos ou dos procedimentos e cálculos utilizados pode ser considerado uma forma de sistematização e formalização, usando uma linguagem matemática. Para o professor, o registro é um instrumento importante que permite conhecer melhor os estudantes. É importante que o professor procure fazer intervenções que gerem a necessidade do registro escrito, considerado um instrumento que permite aos estudantes a análise de suas jogadas e a construção de estratégias.

6° Momento: intervenção escrita

Refere-se à problematização matemática do jogo e propicia uma análise mais específica sobre ele, aborda diferentes aspectos que podem não ter ocorrido durante as partidas.

7° Momento: jogar com 'competência'

O último momento considera os aspectos anteriormente analisados (intervenções). O termo "jogar com competência" é usado considerando que o estudante, ao jogar e refletir sobre as suas e outras possíveis jogadas, adquire uma certa "competência" naquele jogo.

O Currículo da Cidade de Matemática e os jogos

No Currículo da Cidade de Matemática, os jogos são propostos por meio dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, mas deixam livre a escolha do professor pelo jogo que possibilita a consecução do objetivo. Nesse sentido, cabe destacar que é preciso alguns cuidados na escolha do jogo pelo professor. É preciso cuidado com o tempo de duração, a organização da sala, a disposição das carteiras, a idade dos estudantes, o número de participantes, o material necessário, etc. Na gestão da aula, é importante deixar um tempo para uma discussão final sobre as estratégias utilizadas e para o "processo de matematização das situações".

Para Corbalán (1996), o momento posterior ao jogo é quando os estudantes explicitam os processos seguidos e ganham experiências para outros jogos. O autor denomina de processo de matematização de situações e considera esse fundamental para a formulação e comprovação de hipóteses. Esses procedimentos são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e propiciam caminhos para a generalização.

No Currículo da Cidade, no Eixo Articulador de Jogos e Brincadeiras, sugerimos dois objetivos de aprendizagem e desenvolvimento relativos a Jogos e Brincadeiras para cada ano de escolaridade. Para além dessa sugestão, o professor poderá também fazer uso de outros jogos de estratégias ou jogos de conhecimento para o desenvolvimento de atividades que contemplem os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento. Estes objetivos permitem a utilização de jogos de conhecimento em vários momentos da aula, por exemplo, podem ser usados para fazer diagnósticos, antes da introdução de um assunto, como estratégia para desenvolver um objetivo de aprendizagem e desenvolvimento, ou mesmo para avaliação após o desenvolvimento de uma atividade.

O documento curricular de Matemática defende a concepção de jogo como uma possibilidade estratégica no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, que utiliza o espaço escolar como lócus favorável e a abordagem do jogo por meio da problematização, da comunicação, da descrição de diferentes formas de pensamento, de argumentação, de socialização das ideias durante e depois da realização do jogo.

É importante destacar que apenas jogar contribui pouco para a aprendizagem em Matemática. Um ponto crucial é o processo de intervenção do professor, de discussão sobre a Matemática envolvida, de sistematização de conceitos e procedimentos que emergiram durante o desenvolvimento do jogo. Outro ponto importante a ser destacado no desenvolvimento de jogos e brincadeiras é o registro. Cabe ainda salientar a comunicação das regras, das estratégias, a justificação das estratégias, etc. Esses pontos serão comentados na sequência, a partir de alguns objetivos de aprendizagem e desenvolvimento propostos no Currículo da Cidade.

> Um saber fundamental para os estudantes é a comunicação. Por meio dela, partilham saberes, reorganizam significados, produzem sentido ao que vivenciam na escola.
>
> No entanto, para que realizem tais tarefas, é necessário que o professor organize situações didáticas nas quais tenham que planejar uma fala para socializar procedimentos e descobertas, por exemplo. Nessa situação, vivenciar a comunicação (planejada) é que gera aprendizagem.

No Ciclo de Alfabetização, os jogos propostos nos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento permitem explorar diferentes formas de registro, por meio de tabelas, gráficos, pictóricos ou mesmo escritos por meio de textos coletivos. Permitem, ainda, desenvolver jogos de estratégias, como exemplo, podemos citar o quebra-cabeça, em que os estudantes analisem possibilidades de encaixes das peças e descrevam essas estratégias. Outro tipo de jogo proposto nos objetivos permite descrever as regras do jogo, discuti-las e modificá-las sem perder o objetivo desafiador. Também, os jogos permitem o desenvolvimento da argumentação, na medida em que os estudantes precisam utilizar diferentes estratégias para atingir os objetivos do jogo e descrevê-las argumentando sobre suas escolhas. Mas há, ainda neste ciclo, jogos e brincadeiras tradicionais que possibilitam explorar contagens, cálculos rápidos, movimentos, etc., que podem ser usados como estratégias para o desenvolvimento de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento.

No Ciclo Interdisciplinar, há objetivos que envolvem jogos de conteúdos que explicitam o objeto do conhecimento, como os que permitem analisar o que é certo, provável, pouco provável ou impossível de acontecer em um jogo, ou então os que possibilitam formar triângulos, quadrados e retângulos com um número limitado de peças do TANGRAM (ou outro tipo de quebra-cabeças), ou mesmo a exploração de tópicos do currículo de Matemática em situações com jogos. Outros objetivos destacam a discussão e a comunicação de estratégia, a justificativa de escolhas, a antecipação de jogadas, a argumentação, a pertinência de jogadas.

No Ciclo Autoral, os jogos envolvem tecnologias digitais que permitem decodificar regras de funcionamento, propondo discussões das estratégias utilizadas e argumentando sobre suas escolhas, ou que permitem ampliar e reduzir figuras geométricas planas, propondo discussões sobre as deformidades, argumentando sobre elas. Outros objetivos destacam jogos que envolvem objetos do conhecimento, estratégias e procedimentos de cálculo mental e de pensamento combinatório, além de jogos que envolvem estratégias de percepção de regularidades e percepção do processo de generalização.

Jogos computacionais e a educação matemática: contribuições das pesquisas e das práticas pedagógicas.
Regina Célia Grando, Universidade São Francisco. E-mail: regina.grando@saofrancisco.edu.br
Anais do X ENEM. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T21_CC724.pdf.

Processos Matemáticos

Introdução

A maioria das vezes, quando se fala da Matemática aprendida na escola, a primeira coisa que vem à cabeça é que nas aulas de Matemática havia uma lista grande de exercícios para serem resolvidos.

Quando se pergunta o que foi aprendido nessas aulas, a resposta nem sempre é imediata e algumas noções matemáticas são lembradas como equações, "frações", operações, etc. Às vezes são lembradas noções de geometria como figuras geométricas, áreas, volumes. Do Ensino Médio, as lembranças mais evidentes são as matrizes, as funções, a geometria espacial.

Pense no que você aprendeu de Matemática na escolaridade básica. Você concorda com essa afirmação? Faça uma lista do que se lembra de ter aprendido na escolaridade básica. Continue a leitura e verifique se os conteúdos lembrados foram citados no texto.

Cabe destacar que o ensino de Matemática envolve não apenas os conceitos matemáticos, mas também passa pelos processos matemáticos que a aprendizagem dessa área abarca.

Mas afinal o que são processos matemáticos? Pense sobre o assunto e liste alguns que você conhece.

Muitos dos aspectos das atividades matemáticas ajudam a caracterizar a Matemática como processo de busca, de questionamento, conjeturas, provas, aplicações, comunicação, etc.

Os processos matemáticos estão presentes quando se usa a Matemática de forma diferente da mera aplicação de algoritmos. Esses processos compreendem todas as ações que permitem trabalhar com os conceitos dessa área. Eles são fundamentais na resolução de atividades matemáticas.

Os processos matemáticos permitem trabalhar com conceitos matemáticos.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigações, de provas e demonstrações podem ser citados como formas privilegiadas de desenvolver atividades matemáticas, motivo pelo qual são ao mesmo tempo objeto e estratégia de ensino.

A seguir discutiremos alguns desses processos.

Resolução de problemas

Os processos de resolução de problemas constituem um dos elementos principais da atividade matemática e devem ser fonte de suporte principal da aprendizagem no Ensino Fundamental, visto que são essenciais na Educação Matemática. Eles devem desenvolver habilidades para que os estudantes compreendam diferentes formas de planejamento e implementem planos práticos, revisem os procedimentos de busca de solução e projetem aplicações do conhecimento matemático a diversas situações da vida real, sobretudo, desenvolvam a autonomia para levantar hipóteses, constatá-las, desenhar diferentes estratégias de resolução e extrapolar os resultados obtidos a outras situações análogas.

A resolução de problemas permite que o estudante aja de forma propositiva frente aos desafios e busque soluções de forma individual ou coletiva, o que também favorece o trabalho colaborativo

Nos documentos curriculares das últimas décadas, a resolução de problemas ocupa um lugar privilegiado, já que permite desenvolver estratégias de pensamento. O processo de resolução de problemas é complexo, envolve leitura, análise e compreensão do enunciado; planificação do processo de resolução; seleção de estratégias e procedimentos a utilizar; modificação do plano de resolução, se necessário; discussão e validação dos resultados obtidos e apresentação dos resultados. No item Ensinar e Aprender Matemática do Currículo da Cidade, há uma discussão sobre Resolução de Problemas em que se considera que um estudante está diante de um problema quando não tem nenhuma solução imediata para sua resolução. O foco dado neste material, será da Resolução de Problemas como um processo matemático, ou seja, será objeto de conhecimento. Nessa perspectiva, ela permite desenvolver nos estudantes ideias matemáticas e estratégias de pensamento. É um processo complexo que recorre a processos mais simples de representar e relacionar.

No Currículo da Cidade há um Eixo de Processos Matemáticos que ano a ano foca a Resolução de Problemas como objeto de conhecimento, desde o Ciclo de Alfabetização. No Eixo citado, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento apontam, ano a ano, a resolução de problemas como um processo matemático.

A Resolução de Problemas envolve situações da vida cotidiana relativas aos objetos de conhecimento elencados para o ano de escolaridade, estabelecendo conexões entre a realidade e a Matemática, valorizando a utilidade dos conhecimentos matemáticos adequados para sua resolução.

Dentre as estratégias e procedimentos colocados em prática na Resolução de Problemas, podem ser usados um esquema da situação, uma tabela, procedimentos de ensaio e erro, operações matemáticas adequadas, análise de padrões e regularidades, etc.

No Ciclo Autoral é importante relacionar com outros problemas conhecidos, modificar as variáveis e analisar o problema resolvido. Neste momento dos ciclos, o enfoque do trabalho interdisciplinar trazido pelo processo matemático é dos mais ricos e deve ser aproveitado para se dar a resposta ao problema investigado.

Investigações

Como já foi discutido no item Ensinar e Aprender Matemática, a investigação é um processo de grande importância na atividade Matemática. Uma investigação se difere de um problema por ser um processo mais aberto e mais longo e com uma formulação mais aberta e menos definida.

Uma investigação requer a formulação de uma questão aberta, a compreensão dessa questão, a formulação de conjeturas, a testagem das hipóteses e sua reformulação, a validação das hipóteses e o relato do processo. Nas atividades investigativas se valoriza mais o processo do que o produto. O professor tem um papel muito importante, pois precisa manter o equilíbrio entre a autonomia necessária para que o estudante seja o autor da investigação e a possibilidade do trabalho do estudante fluir naturalmente. O professor tem o papel de desafiar os estudantes, avaliando seu progresso, seu raciocínio matemático de apoiar o trabalho e principalmente de escolher com muito cuidado a atividade a ser proposta.

Nas aulas de Matemática, desde o Ciclo de Alfabetização, é necessário propor investigações simples usando diferentes contextos, tanto numéricos como geométricos. Ao realizar investigações é importante que os estudantes procurem dar respostas fundamentadas e rigorosas para questões matemáticas. Há quatro momentos importantes para as investigações: (1) reconhecimento da situação, exploração preliminar e proposição de questões; (2) formulação de conjecturas; (3) realização de testes e eventual refinamento das conjecturas; (4) argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Provas e Demonstrações

Para se falar em justificativas em Matemática por meio de provas e/ou demonstrações, é preciso ter em mente o contexto em que se está realizando a atividade matemática. Nesse sentido, a ideia de justificar algo tem sentidos diferentes para o Ciclo de Alfabetização, para o Interdisciplinar e para o Autoral. Em vista disso, é preciso observar e interpretar o significado das demonstrações e o papel que a comunicação desempenha na atividade matemática.

Existem diferentes caminhos para realizar uma prova de alguma afirmação, como o teorema de Pitágoras.

Analise alguns livros didáticos e veja algumas demonstrações do teorema de Pitágoras. Identifique a forma que você considera mais fácil e justifique. Compare os diferentes conteúdos matemáticos usados em cada prova. Elabore uma prova do teorema de Pitágoras que possua alguma característica diferente do que você encontrou.

Essa tarefa se relaciona à prova de uma igualdade conhecida (o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos). Também é importante identificar "as (outras) formas de uma igualdade conhecida" que a justificativa pode apresentar. Essas provas são realizadas no mundo da Matemática.

A necessidade de justificar está vinculada ao "fazer matemático", porém os diferentes significados e interpretações dados à atividade de provar em matemática devem estar relacionados aos conteúdos matemáticos e aos contextos em que a atividade se realiza.

As provas e demonstrações em Matemática, no entanto, surgiram há muitos anos. Na Grécia antiga, os axiomas eram considerados noções comuns. Eram afirmações evidentes por si só. Os postulados eram proposições geométricas que eram aceitas sem demonstração. Já os Teoremas eram proposições que podiam ser demonstrados a partir dos axiomas, dos postulados e de resultados já demonstrados.

Nos dias atuais, axioma e postulado são considerados sinônimos. Os teoremas podem ser escritos na forma: se p então q. Nesse caso, p chama-se **hipótese** e q chama-se **tese**.

Um teorema pode ser provado por indução ou por dedução.

O **raciocínio indutivo** é aquele que nos leva de uma lista de afirmações particulares para uma afirmação universal.

Por exemplo, a partir dos casos particulares

$1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

Podemos por indução conjecturar que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$. Mas isto não é uma prova. Para provar essa afirmação é preciso utilizar o princípio de indução finita.

O **raciocínio dedutivo** é desenvolvido mediante técnicas tais como:

- Prova direta (assume-se a hipótese e deduz-se a tese)
- Prova por contraposição (assume-se a negação da tese para deduzir a negação da hipótese)
- Prova por absurdo (assume-se a negação da tese, assume-se também a hipótese e deduz-se uma contradição)

Processos Matemáticos Elementares

Os processos matemáticos citados neste texto têm um grau de complexidade grande e no seu desenvolvimento recorrem a processos mais elementares como o de representar, de relacionar, de comunicar, de argumentar, de justificar, etc.

Nos processos matemáticos focalizados no Currículo da Cidade recorrem-se a outros processos mais simples como calcular, generalizar, interpretar, relacionar etc.

Representação

Com relação à **representação**, o Currículo da Cidade explora a importância do uso de representações em Matemática, pois os conceitos matemáticos são abstratos (número, grandeza, medida, operação,...) e necessitam de representações. Podem ser tanto na linguagem natural (oral ou escrita) como com uso de símbolos (algarismos, sinais de operações, de igualdade, de desigualdades, etc.) ou representações em forma de figuras, gráficos ou diagramas, esquemas etc. Há representações matemáticas que são universais. O uso de representações é fundamental na resolução de um problema.

Os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do Eixo de Processos Matemáticos permitem relacionar e operar com conceitos. Essas ações necessitam de processos mais simples como calcular, simplificar, generalizar, considerar casos concretos, interpretar, relacionar conceitos matemáticos ou suas representações, de modo a dar sentido a esses conceitos e ideias matemáticas.

Comunicação

Com relação à **comunicação**, o Eixo de Processos Matemáticos, por meio dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, permite que os estudantes expressem suas ideias e ampliem seu conhecimento matemático. Ao explicar um resultado ou um processo, o estudante desenvolve o poder de justificar, argumentar e organizar seu pensamento. A comunicação permite ainda uma reflexão sobre o pensamento dos estudantes, seus erros e dificuldades e intervenções possíveis. O Currículo da Cidade traz outras discussões relativas à Comunicação.

Processos Matemáticos nos Ciclos

No Ciclo de Alfabetização, o Eixo de Processos Matemáticos focaliza a Resolução de Problemas como objeto de conhecimento, destaca explicações orais de estratégias e os processos de raciocínios utilizados na resolução de um problema, registros feitos e respostas obtidas na resolução de um problema, o processo desenvolvido nessa resolução e justificar a resposta usando vocabulário pessoal. Além disso, enfoca a elaboração coletiva de perguntas para um problema iniciado pelo professor, o enunciado de um problema a partir de uma sentença matemática. No terceiro ano desse ciclo, já surgem as primeiras investigações matemáticas envolvendo o objetivo de investigar a validade da propriedade comutativa da adição, a partir de regularidades.

No Ciclo Interdisciplinar há uma ampliação no Eixo de Processos que focaliza, no âmbito da Resolução de problemas, a linguagem matemática e as estratégias de resolução, além da elaboração de textos de problemas, na justificativa das respostas. Nesse eixo são exploradas as investigações sobre propriedades a partir de regularidades, a validade da propriedade associativa da adição e da multiplicação, a validade da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (ou subtração), a mesma propriedade para a divisão em relação à adição (ou subtração), além dos resultados de multiplicações por 0 e por 1, as relações de dobro e quadrado de um número, a existência de quadrados perfeitos em sequências figurais, além de produção de justificativas e de produções de textos comunicando as conclusões obtidas.

No Ciclo Autoral, o foco dos processos é no desenvolvimento de um trabalho científico e de investigações de relações algébricas. Os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento permitem investigar se duas expressões algébricas são ou não equivalentes, justificando seus procedimentos. Com relação ao trabalho científico, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento permitem investigar algumas características desse trabalho em situações reais, identificando o tema, as questões de pesquisa sobre esse tema e a elaboração de um projeto de pesquisa, usando o método científico que possa, também, subsidiar o Trabalho Colaborativo de Autoria (TCA).

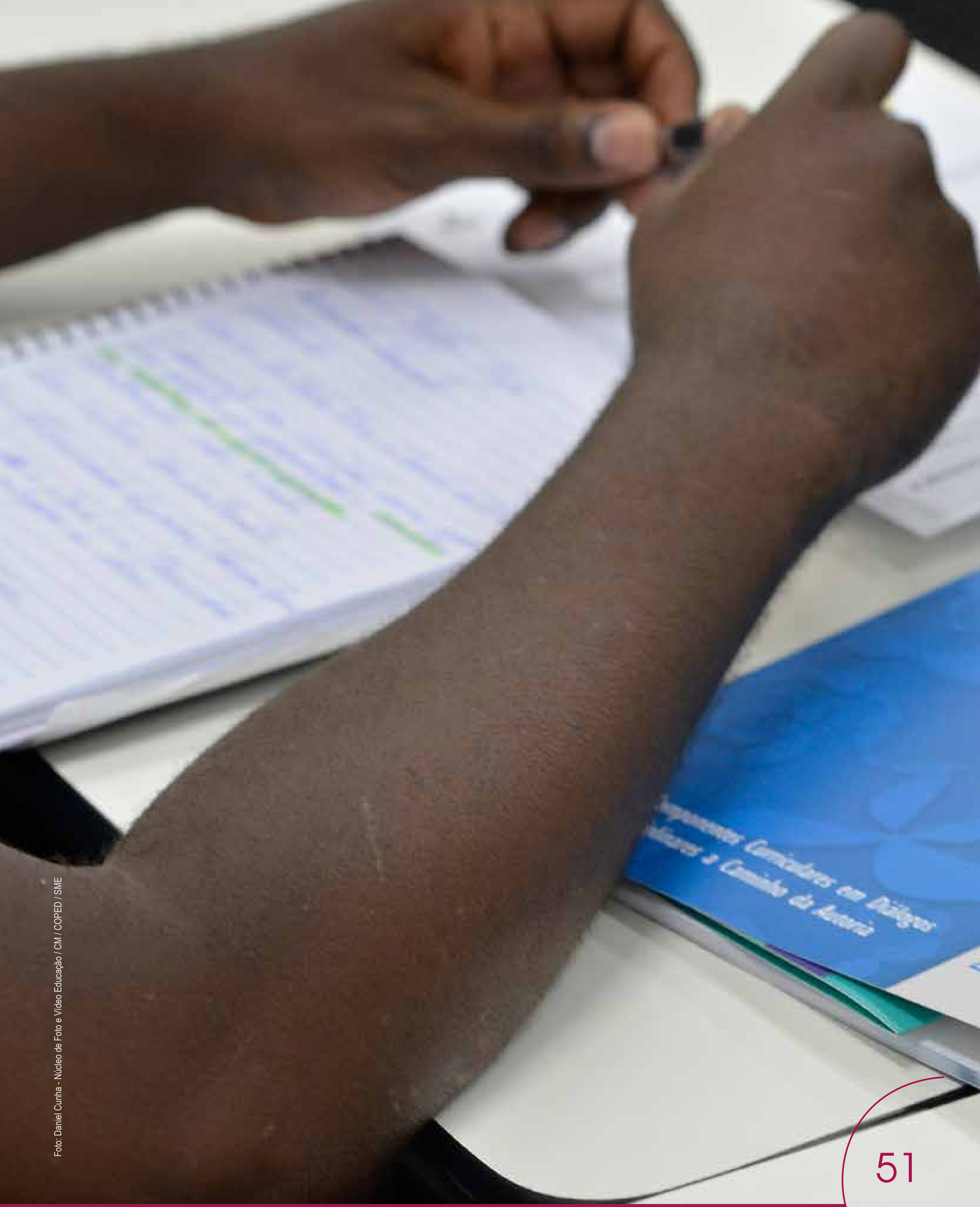


Foto: Daniel Cunha - Núcleo de Foto e Vídeo Educação / CM / COPED / SME

Eixo Números

Construção dos Números Naturais e do Sistema de Numeração Decimal

O ensino de Números Naturais: perspectivas atuais

Os números e as operações aparecem frequentemente nas atividades cotidianas. Os Números Naturais permitem codificar, tratar e transmitir informações de maneira fácil e concisa, sendo um meio de expressão e comunicação universal. Nesse sentido, percebe-se que as crianças chegam à escola com uma série de experiências vivenciadas nas práticas sociais e de informações relacionadas aos Números Naturais e às operações. Entretanto, embora os Números Naturais e o sistema de numeração decimal (SND) ocupem um papel importante nos currículos de Matemática, historicamente a escola tem se deparado com a evidente contradição entre a relevância dada aos seus diferentes usos e funções e a maneira como são ensinados.

> Pense nas atividades cotidianas e relacione-as aos diferentes usos dos Números Naturais exemplificando cada situação. Depois continue a leitura do texto.

O ensino dos números justifica-se pelas suas características prática, social e utilitária. No entanto, ainda hoje há um enfoque baseado na tradição pedagógica que considera que os números devem ser ensinados aos poucos, um a um, seguindo a ordem da sequência numérica. Não se pode apresentar o 5 antes de ensinar os números 0, 1, 2, 3 e 4, ou ainda, não se pode ir além do 9 antes de ensinar o significado de dezena. Nesta perspectiva a escrita convencional dos números é central e a ideia é propor a reprodução de linhas inteiras de cópias do mesmo número ou mesmo desenhá-los, cortá-los, pintá-los, etc.

> Reflita sobre a seguinte questão: No cotidiano, os números se apresentam respeitando uma sequência numérica? Como se dá socialmente o nosso contato com os números?

Como produto cultural da humanidade, basta atentar-se à rotina diária de nossas vidas para identificar a frequência com que os números aparecem nos livros, jornais, anúncios, revistas, celulares, eletrodomésticos, calculadoras, cédulas, Para identificar conhecimentos prévios das crianças do Ciclo de Alfabetização sobre as diferentes funções dos números (cardinal, ordinal, código e medida), o professor pode fazer alguns questionamentos que podem servir de base para um diagnóstico: Para que servem os números? Que números vocês conhecem? Em que situações do dia a dia vocês utilizam os números? Eles são importantes para quê?

Durante a conversa, o professor pode registrar as respostas. Depois organizar essas informações em colunas, mapeando as funções dos números que as crianças já sabem e as que elas ainda têm pouco domínio.

Esse diagnóstico permite ao professor fazer intervenções para ampliar o universo numérico das crianças.

Algumas indagações contribuem quando se tem o propósito de ensinar os Números Naturais a partir das perspectivas atuais:

Se no contexto social nos deparamos com números de diferentes grandezas, como justificar seu ensino de maneira fragmentada, seguindo uma sequência numérica? O que fazer com os números que são familiares (idade, número do calçado, etc.) e frequentes (número da sala de aula, ano corrente, número de estudantes na sala de aula, etc.) no cotidiano das crianças? Sabendo que os números estão por toda a parte, para que memorizá-los e reproduzi-los sem a compreensão das suas funções, significados e características?

Reflita sobre essas questões e continue a leitura do texto que ajudará a repensar sobre o assunto.

moedas, instrumentos de medida (relógios, trena, fita métrica, calendário, balança...), entre outros portadores numéricos.

Mediante tantas situações em que os números são utilizados, faz-se necessário identificar e distinguir suas funções e significados. O número natural serve para representar quantidades (função cardinal), como indicar quantos estudantes estão presentes em uma sala de aula. Em outras situações, o número é um indicador de posição (função ordinal) que permite, por exemplo, representar a classificação do time de futebol durante um campeonato. Há momentos em que o número natural é utilizado para codificar (função de código), como aparecem nos números de telefone e de documentos pessoais, como a cédula de identidade e o título de eleitor. Além de quantificar, ordenar e codificar, o número também pode representar a ideia de medida (função de medida). As horas, a altura e a massa corporal, são exemplos práticos de como utilizamos o número como medida.

No uso da sua função cardinal, as crianças costumam recitar os nomes dos números em uma sequência em ordem crescente ou decrescente sem referir-se a pessoas ou objetos. Em outras situações também associam a palavra número a um elemento de uma coleção. Do ponto de vista didático, é importante diferenciar essas duas situações porque recitar números é diferente de contar. Enquanto a primeira se refere a uma recitação numérica em que não há associação do número falado ao objeto, mas sim, a pronúncia dos nomes dos números respeitando uma determinada ordem ou agrupamento (um em um, dois em dois...); a segunda envolve a contagem, atividade mais complexa que requer a correspondência biunívoca (um a um), que nada mais é do que a associação da palavra número para cada objeto cuja última palavra número mencionada representa o total de objetos da coleção. Para não se perderem, as crianças costumam marcar os objetos, uma estratégia válida que auxilia no procedimento de contagem. Portanto, recitar, embora sirva de importante apoio para a contagem, não é sinônimo de contar.

O Sistema de Numeração Decimal: algumas de suas características

O Sistema Numérico Decimal, denominado também indo-arábico, sem dúvida alguma, é uma das convenções mais importantes inventadas pela humanidade. É um sistema extremamente prático e econômico, capaz de representar números de qualquer ordem de grandeza. Embora utilizado no nosso dia a dia de maneira informal pelo fato de ter algumas características e regularidades não explícitas em sua representação, na escola apresenta grandes desafios para o seu processo de ensino e aprendizagem. Sendo assim, ensinar as características deste sistema numérico é imprescindível para o avanço dos conhecimentos matemáticos, principalmente as operações que se estruturam a partir dessas mesmas características.

> Mas afinal que características são essas?
>
> Resgate e registre as características do SND que você conhece e depois continue a leitura do texto, comparando e ampliando suas reflexões.

As características desse importante sistema são:

- É composto por dez algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) que combinados podem formar infinitos números.
- É posicional, pois dependendo da posição que o algarismo ocupa no número, representa um determinado valor. A posição e o valor do algarismo <u>2</u> nos números: <u>2</u>4 e 4<u>2</u> são diferentes. No número <u>2</u>4, o algarismo 2 representa 20 unidades ou 2 dezenas; já no número 4<u>2</u>, representa 2 unidades. A organização da escrita numérica em ordens e classes do SND torna-se complexa, pelo fato de o valor posicional do algarismo ser ocultado.
- Sua base é dez, ou seja, nosso sistema numérico se organiza a partir de agrupamentos de 10 em 10. A cada agrupamento muda-se a ordem ou a classe do número.
- Todo número pode ser representado usando-se o princípio aditivo, ou seja, 64 = 60 + 4 ou 50 + 10 + 4 ou ainda 20 + 20 + 20 +2 + 2.
- Todo número pode ser representado usando-se o princípio multiplicativo, ou seja,
  90 = 9 x 10; 900 = 9 x 100 ou 90 x 10.
- Todo número natural pode ser decomposto na forma polinomial, ou seja,
  $900 = 9 \times 100 = 9 \times 10^2$
  $3548 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 4 \times 10 + 8 = 3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

Essas características devem ser introduzidas e trabalhadas desde o Ciclo de Alfabetização, sendo ampliadas e sistematizadas nos Ciclos Interdisciplinar e

Autoral. A decomposição de um número na forma polinomial pode ser explorada a partir do 6º ano.

A funcionalidade do SND é resultado de um longo processo sociocultural no qual a humanidade levou séculos para chegar à convenção que conhecemos. Em contrapartida, muitas vezes, temos a expectativa que as crianças e adolescentes consigam compreender seus usos, significados, funções e características de uma hora para outra, desconsiderando a complexidade presente neste objeto de conhecimento.

A seguir apresenta-se a organização do SND em classes até a unidade de milhão.

3ª classe	2ª classe	1ª classe
Unidades de milhão	Unidades de Milhar	Unidade simples
Até 9.999.999	Até 9.999	Até 999

Cada classe é organizada em 3 ordens, como está representada a 1ª classe.

1ª Classe - Unidades simples		
3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centena	Dezena	Unidade
2	3	6
Valor posicional = 200, ou seja, 2 x 100 ou 100 +100	Valor posicional = 30, ou seja, 3 x 10 ou 10 + 10 + 10.	Valor posicional = 6, ou seja, 6 x 1.

Algumas contribuições teóricas sobre a aprendizagem dos números e do SND

Alguns estudos comprovam que para aprender números não é preciso inicialmente saber escrevê-los convencionalmente. As pesquisas de Lerner e Sadovsky (1996) trazem grandes contribuições a respeito e revelam que a criança elabora hipóteses numéricas muito antes de ingressar na escola devido à convivência com os diferentes usos e funções sociais dos números que lhes são familiares e frequentes. Os números familiares são significativos, como o número que representa a idade, telefone, calçado, roupa e a data de aniversário. Já os números frequentes se referem àqueles que fazem parte do contexto social, como os números do calendário, dos canais de televisão, do dinheiro, dentre tantos outros que circundam socialmente.

As hipóteses numéricas mostram o quanto as crianças refletem sobre as características do SND e que, ao contrário do que imaginávamos, “a apropriação da escrita convencional dos números não segue a ordem da série numérica” (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 87).

As hipóteses numéricas são identificadas pelas autoras a partir de situações de leitura e escrita. Cabe destacar que ler e escrever números, apesar de habilidades correlatas, são distintas.

Observe o ditado a seguir:

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Observe e analise como duas crianças de 3º ano representam os números ditados (95 - 300 - 555 - 804 - 1437 - 6709):

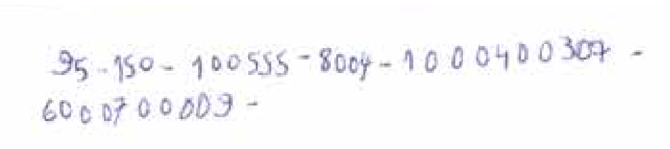


Figura 1 - Ditado de números

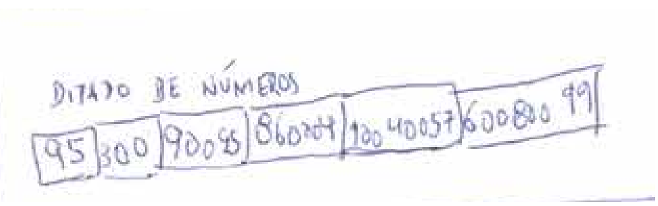


Figura 2 - Ditado de números

- O que você observa de semelhante e diferente entre os registros 1 e 2?
- É possível identificar alguma característica do SND nos registros?
- Por que em algumas representações numéricas há o uso excessivo do algarismo zero? O que isso significa?
- Por que alguns números são escritos convencionalmente e outros não?
- Você, professor(a), que leciona nos Ciclos Interdisciplinar e Autoral, já se deparou com representações numéricas semelhantes aos registros 1 e 2?

O papel da numeração falada

Quando a criança se depara com a escrita de um número, geralmente, afirma que registra “do jeito que fala”. Esta hipótese de escrita numérica está associada à ideia de justaposição, em que a notação do número é construída de maneira decomposta. Dessa forma, ao pedir para que escreva o número 689, várias representações podem surgir (600809, 60089 e 6809), quando a escrita numérica é apoiada na fala.

Lerner e Sadovsky (1996) sinalizam que o registro numérico por justaposição é explicado por algumas características do SND, pois falamos os nomes dos números aditivamente – de forma decomposta –, porém, registramos posicionalmente. Ao recorrer à fala para escrever números, a criança mostra reconhecer, mesmo que de maneira intuitiva, o princípio aditivo do sistema numérico.

Segundo as autoras, na numeração falada a justaposição de palavras supõe sempre uma operação aritmética de adição ou de multiplicação, ou seja, as crianças escrevem um número como o falam: escrevem 100205 para registrar 125 recorrendo ao princípio aditivo ou escrevem 21000 para 2000 denotando uma justaposição multiplicativa.

Diferentes formas de registros numéricos indicam quando o estudante não incorporou as características do SND respeitando as suas diferentes ordens e classes. Por exemplo, escrevem convencionalmente 235 e ao escreverem 4235 fazem 4000235. Mesmo aqueles que escrevem convencionalmente os números entre 100 e 200, podem não generalizar este tipo de escrita para outras ordens. Isso mostra que a relação entre a numeração falada e a numeração escrita não é unidirecional, embora se observe que a numeração falada intervém na conceituação da escrita numérica.

A pesquisa de Vece, Silva e Curi (2013) realizada com 378 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, a partir de questões sobre o SND do SAEB (Sistema de Avaliação do Ensino Básico) / Prova Brasil, desmistificou a ideia de que uma vez compreendido os números até a unidade de milhar, os estudantes deste ano de escolarização são capazes de generalizar e ler números de qualquer ordem de grandeza. Os resultados revelaram inconsistências em relação à compreensão do valor posicional dos algarismos no número nos procedimentos de composição e decomposição a partir da ordem da dezena de milhar. Isso significa que o processo de aprendizagem do SND não é linear.

A reflexão sobre a escrita e leitura dos números não se restringe ao processo de aprendizagem das crianças e adolescentes. Se depararmos com a necessidade do registro e da leitura de números exorbitantes, pouco utilizados no nosso cotidiano, também sentiremos a necessidade de parar, pensar e refletir sobre a sua representação.

Imagina registrar o número *quatro trilhões, oitocentos e oitenta bilhões, novecentos e quarenta milhões, trezentos e oitenta mil, setecentos e vinte*? Ou ler o número 10.780.273.653.125.348?

Certamente a escrita e leitura desses números não acontecem de forma imediata, sendo necessário resgatar alguns conhecimentos prévios sobre a organização do SND (classes e ordens). Correto?

É uma maneira de refletirmos sobre como nossas crianças e adolescentes se sentem e quais conflitos enfrentam diante de situações de leitura e escrita de números.

As situações de escrita e leitura de números são importantes, pois "obrigam a criança a questionar e reformular suas ideias para aproximar-se progressivamente da compreensão da notação convencional" (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 75). Nesta ótica, diferentemente das concepções tradicionais que permeiam o ensino de Matemática, a criança é concebida como um sujeito capaz de construir hipóteses e formular conjecturas sobre os números, cabendo ao professor compreendê-las e reconhecê-las como conhecimento provisório que pode ser ampliado e construído.

Veja alguns exemplos que ilustram as hipóteses em situações de leitura de números apresentadas por Lerner e Sadovsky (1996):

O primeiro é quem manda

Quando convidada a comparar números com a mesma quantidade de algarismos, a criança observa a posição que eles ocupam para descobrir qual é o maior ou menor. A hipótese possui uma lógica pertinente, pois evidencia a reflexão acerca do valor posicional. O diálogo a seguir ilustra essa hipótese:

(Professora) – *Por que 61 é maior que 16?*

(Criança 1) – *Eles têm os mesmos "números" (algarismos) professora. Só que no primeiro o seis está antes do um e no segundo número o seis está depois.*

(Criança 2) – *O "número" (algarismo) que tem mais valor é o que fica na frente.*

A magnitude dos números

Quando desafiada a comparar números compostos por quantidades de algarismos diferentes, as crianças, mesmo sem conhecer as regras do SND, são capazes de dizer qual é o maior número.

(Professora) - *Qual é o maior número 777 ou 88?*

(Criança 1) - *O maior é o 88, por que o 8 vale mais que o 7*.

(Criança 2) - *O maior é o 777, por que tem mais "números" (algarismos)*.

Às vezes, remetem ao valor absoluto do algarismo maior, desconsiderando, o valor do número como um todo, como a resposta da Criança 1. Ou então, relacionam à quantidade de algarismos que compõem os números comparados, como a criança 2. Esta hipótese pode aparecer mesmo quando a criança não conhece convencionalmente os nomes dos números.

Segundo Parra e Saiz (1996), o papel das regularidades pode ser observado em situações de comparação e nos argumentos construídos pelas crianças para fundamentar ou rejeitar uma escrita numérica quando comparam dois números.

As autoras afirmam que, ao estabelecer regularidades, é possível explicitar a organização do SND e gerar avanços no uso da numeração escrita.

Refletindo sobre o que leu até aqui, que mudanças você vislumbra na sua prática para o ensino do SND?

Cabe destacar que os professores dos Ciclos Interdisciplinar e Autoral também podem se deparar com as hipóteses de leitura e escrita de números por parte dos estudantes. Por isso, a importância do planejamento de atividades diagnósticas para que esses conhecimentos sejam explicitados.

O ensino do SND: algumas orientações

Segundo Lerner e Sadovsky (1996), a forma como o SND tem sido ensinado não valoriza os saberes prévios dos estudantes como ponto de partida para sua apropriação, nem explora as estratégias de compreensão criadas por eles, resultando na oferta de um ensino desinteressante e pouco reflexivo do sistema.

Frente a essa condição, algumas dúvidas no processo de ensino são comuns: como apresentar o SND aos estudantes? Que tipo de atividade é mais importante? O que deve ser considerado para avançar na grandeza numérica? O que fazer quando o estudante não compreende o valor do algarismo de acordo com a ordem que ocupa?

Pense a respeito e continue a leitura do texto.

Para que o estudante se aproprie adequadamente do sistema de numeração é importante descobrir o que a sua representação oculta e, para isso, o professor torna-se o mediador dessa descoberta. A construção deste conhecimento irá ocorrer ao longo dos Ciclos de Alfabetização e Interdisciplinar, enquanto o estudante vai incorporando as características e a funcionalidade do SND. Para tanto, o professor necessita garantir a sistematização das características do SND utilizando recursos de ensino facilitadores, como: quadro numérico, calendário, quadro de ordens e classes ou quadro de valor posicional, recursos tecnológicos (calculadora e celular), dentre outros portadores numéricos. Além disso, propor situações que envolvam contagem, ditados, jogos e brincadeiras com números.

Vejamos como alguns destes recursos, se utilizados adequadamente pelo professor, podem contribuir para o processo de aprendizagem dos números.

Quadros numéricos

A seguir exemplificamos o uso do quadro numérico em um trabalho que permite a exploração de regularidades e um diagnóstico sobre os conhecimentos dos estudantes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Algumas questões podem ser feitas como: na coluna do 5, quais são os algarismos que ocupam a ordem da unidade? (ou a partir de uma linguagem mais simples para os menores "Com qual algarismo terminam os números da coluna do 5?"; Com qual algarismo iniciam os números escritos na linha do 2?).

Estas e outras questões desse tipo permitem ao professor explorar as regularidades presentes no quadro numérico quando se observa a sequência na ordem crescente e decrescente e a partir de diferentes agrupamentos (de um em um, dois em dois, cinco em cinco, dez em dez e assim por diante). Possibilita também fazer previsões para que os estudantes identifiquem os próximos números da sequência, ou mesmo a conservação das regularidades exploradas quando se amplia a sequência numérica.

A partir desse diagnóstico, o professor pode ampliar o quadro numérico de acordo com os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento previstos no Currículo da Cidade para o ano que atua. Por isso, o quadro numérico não precisa, necessariamente, iniciar a partir do 0. Pode também explorar "recortes" de intervalos numéricos, por exemplo, de 800 a 999, ou de 900000 a 999999. O importante é que os estudantes percebam as regularidades numéricas que existem em todo o SND, independente do intervalo explorado.

Para identificar conhecimentos prévios dos estudantes, com relação às sequências numéricas, o professor pode realizar uma conversa questionando-os acerca do que sabem com relação à continuidade da sequência numérica, como: quais os próximos números dessa sequência? Se a fileira dos números que terminam em 3 continuasse, quais seriam os próximos 2 números? E se a fileira dos números que terminam em 9 continuasse, quais seriam os próximos 3 números?

Essas questões permitem ao professor mapear os intervalos numéricos que o grupo tem maior ou menor domínio e fazer as intervenções para ampliação dos conhecimentos.

É importante que as crianças e adolescentes percebam que o SND apresenta regularidades que são comuns para qualquer ordem de grandeza dos números e que o professor compreenda que não é preciso focalizar com profundidade cada ordem de grandeza numérica antes de ampliar para uma ordem de grandeza superior. Afinal, convivemos com números de diferentes grandezas no nosso dia a dia.

Ditados de números

Para investigar os conhecimentos dos estudantes sobre a escrita numérica e acompanhar sua evolução, propomos o trabalho com ditado, momento intencional que requer planejamento sistemático a partir da construção de critérios de seleção de números. Esses critérios têm características próprias que se repetem a cada ano de escolaridade, mudando apenas o intervalo numérico a ser ensinado.

Vejamos alguns desses critérios:

- Números familiares (números que compõem a data de nascimento, a idade, o número da roupa, etc.) e frequentes (números que representam o dia, mês e ano, o canal de TV, as cédulas e moedas que circulam socialmente etc.), esses também são conhecidos como números "marco" pelo fato de serem significativos aos estudantes;
- Números "opacos", ou seja, que não oferecem indícios na fala quanto a sua representação (11, 12, 13, 14 e 15);
- Números cuja pronúncia é possível identificar quais são os algarismos que os compõem, por exemplo: 74 (setenta e quatro = 70 + 4). Também são conhecidos como números "transparentes";
- Números que terminam com zero (10, 20, 100, 200, 1000, 2000) ou "nós" das dezenas, centenas, unidades de milhar etc. No processo de construção da escrita numérica é comum as crianças e adolescentes se apropriarem primeiramente da escrita dos "nós" para, posteriormente, avançarem para a escrita convencional dos números intermediários presentes no intervalo;
- Números compostos por algarismos iguais (11, 22, 33, 111, 222, 333...);
- Números compostos por algarismos diferentes em posição invertida (12, 21, 123, 213, 321...);
- Números compostos por algarismos diferentes (15, 27, 134, 546...);
- Números que permitem observar o processo de generalização. Por exemplo: considerando o número frequente que representa o ano vigente 2017, o professor pode ditar 2019 ou 2027 para verificar se os estudantes são capazes de generalizar a representação numérica;
- Números com zero intercalado, (101, 1024...), que na pesquisa de Vece, Silva e Curi (2013) revelaram se constituir num verdadeiro obstáculo para os estudantes.

> Consulte o Currículo da Cidade e leia os objetos de conhecimento e os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento sobre os números previstos para o ano de escolarização que você leciona. Considerando essa informação e os critérios de seleção para o ditado, pense em quais números você ditaria à sua turma.
>
> Levando em consideração a sua prática pedagógica, você acrescentaria outros critérios de seleção para compor o ditado de números? Quais e por quê?

O professor, ao analisar os números escritos pelos estudantes, pode diagnosticar os seus avanços e dificuldades considerando as particularidades presentes em cada um dos critérios de seleção de números para o ditado.

É importante salientar que o SND apresenta algumas exceções que "fogem" das regularidades quando o 0 aparece intercalado entre os algarismos numa escrita numérica, como exemplo 3018. Neste caso, a dificuldade na escrita numérica é natural, pois a decomposição desse número não apresenta regularidades de outros em que os algarismos são todos diferentes de zero. Para esses casos, o uso das cartelas sobrepostas pode auxiliar para a sua compreensão.

Cartelas sobrepostas

Cabe destacar a importância de se trabalhar não apenas com a decomposição de um número em suas ordens e classes ou de acordo com seu valor posicional, mas também com a sua composição, o que permite a visualização da escrita numérica. Neste sentido, as cartelas sobrepostas permitem visualizar o número em sua escrita convencional, ao contrário do material dourado que viabiliza apenas a decomposição ao representar o valor posicional dos algarismos que compõem o número, não havendo clareza quanto à posição dos algarismos na escrita numérica convencional. Por exemplo, sobrepondo as cartelas 200, 50 e 4 obtém-se o número 254.

2	0	0
	5	0
		4

2	5	4

É imprescindível que os estudantes entendam que o SND apresenta regularidades que são comuns para qualquer ordem de grandeza dos números, ou seja, a decomposição de um número da ordem das centenas apresenta as mesmas regularidades que os números da ordem das unidades de milhar ou dezenas de milhão, pois o processo de generalização não é imediato, conforme citação a seguir:

> (...) independentemente do conhecimento consolidado nas unidades simples, o processo de generalização é construído em espiral, com avanços e retomadas conceituais, sendo ele de inteira responsabilidade do professor. Esse processo se constrói em diferentes âmbitos, que vão formando uma malha, a partir da qual as crianças organizam, refletem, reorganizam e ampliam seus conhecimentos a respeito do sistema numérico. Sem compreensão deste, as crianças não fazem generalizações e utilizam o conhecimento mecanicamente. (VECE; SILVA; CURI, 2013, p.238).

Como já foi dito, quando o zero aparece intercalado entre os algarismos em uma escrita numérica, o estudante pode ter dificuldades, principalmente em situações de leitura e escrita de números. O uso das cartelas sobrepostas permite a visualização da posição do algarismo zero em um determinado número, como no caso do número 604 que pode ser obtido com a cartela do 4 sobreposta à cartela do 600.

6	0	0
		4

6	0	4

A pesquisa de Vece, Silva e Curi (2013) revela que a composição ou decomposição de números com zero intercalado não apresenta regularidades como nos casos em que os algarismos são todos diferentes de zero, acarretando dificuldades aos estudantes que usam procedimentos semelhantes para os dois tipos de números.

Outro aspecto problemático para os estudantes é identificar diferentes maneiras de decompor um número. Eles podem perceber que 84 é igual a 8 dezenas e 4 unidades, mas não visualizam que também pode ser representado com 7 dezenas e 14 unidades, por exemplo. Dessa forma, propor atividades que possibilitem diferentes composições e decomposições numéricas é uma estratégia didática necessária para compreensão de números com uma ou mais de uma classe.

Ao final da leitura deste texto, analise os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento previstos no Currículo da Cidade relativos ao ensino dos Números Naturais e do SND, verificando:

- se contribuem para a aprendizagem dos estudantes no ano de escolaridade que você leciona, segundo as premissas apresentadas no texto;
- a progressão dos objetivos de aprendizagem no ciclo em que você atua.

Ao considerar o ensino dos Números Naturais e do SND, é importante que o professor tenha clareza dos objetos de conhecimento e dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento referentes a eles, além de conhecimento didático adequado e suficiente para atender as dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem e do conhecimento do currículo para atentar-se ao ano de escolarização e ciclo em que são propostos. Também o professor assume o papel indispensável de auxiliar o estudante a refletir sobre a lógica da construção dos Números Naturais e do SND a partir da articulação dos seus diferentes sentidos e significados na função escolar e social desses objetos do conhecimento.

Leia o artigo de Vece, Silva e Curi (2013) “Desatando os nós do sistema de numeração decimal: investigações sobre o processo de aprendizagem dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental a partir das questões do SAEB/Prova Brasil”. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/8724/pdf.

Do cálculo mental ao cálculo escrito

Em situações cotidianas é comum que as pessoas utilizem o cálculo mental. Já na vida escolar, mesmo sendo um objeto de conhecimento importante, o cálculo mental não é tão valorizado quanto o cálculo escrito. No decorrer de toda a educação básica, os quatro tipos de cálculo deveriam ser explorados e vivenciados pelos estudantes: o cálculo mental aproximado, o cálculo mental exato, o cálculo escrito (algoritmos) e o cálculo feito com ferramentas de apoio, sendo a calculadora a mais comum.

Que tipo de cálculo você usa com mais frequência na sua vida diária? E na escola como professor, que tipo de cálculo você desenvolve com seus estudantes? Você costuma trabalhar o cálculo mental nas suas aulas? Com qual frequência?

Mas o que vem a ser cálculo mental?

Existem diferentes significados para cálculo mental, de acordo com Parra e Saiz (2001) há pessoas que o consideram como o ato de realizar contas sem o uso de lápis e papel, outros entendem que cálculo mental é o resultado gerado pela articulação de diferentes tipos de cálculos, por fim trata-se do "(...) conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido para obter resultados exatos ou aproximados" (PARRA; SAIZ, 1996 p. 189).

Professor(a), você já propôs um problema ou uma operação matemática à sua turma e se deparou com registros de estudantes que expressam apenas o resultado ou a resposta final?

Ao ocultar o processo realizado para chegar ao resultado, certamente o estudante recorre ao cálculo mental.

Você costuma investigar o raciocínio que os estudantes exploram em situações como essa? Como?

A diferença entre cálculo mental e cálculo escrito (algoritmo) não está na justificativa de que no primeiro não se utiliza de lápis e papel, enquanto no segundo, sim. Os registros escritos não descaracterizam o cálculo mental, ao contrário, eles servem como ponto de apoio em determinadas situações.

Com o uso do cálculo mental espera-se que o estudante adquira prática em utilizar diferentes estratégias com base nas propriedades do sistema de numeração decimal e em sistematizar um conjunto de resultados que permitam a construção de um repertório progressivo de cálculos de adição, subtração, multiplicação e divisão, que ficarão consolidados e disponíveis para serem resgatados sempre que necessário.

Durante a construção de um repertório de cálculo, o estudante identifica algumas propriedades comuns entre as operações de adição e multiplicação, como a associatividade e a comutatividade. Por exemplo:

Se 4 + 5 = 9, logo 40 + 50 = 90 e 400 + 500 = 900

Se 3 x 7 = 21, logo 7 x 3 = 21 e se 21: 3 = 7, então 21 : 7 = 3

A importância do cálculo mental se justifica na aprendizagem Matemática ao favorecer o desenvolvimento da criatividade, de estratégias pessoais para tomar decisões e resolver problemas numéricos, ao possibilitar aperfeiçoamento de capacidades mentais, como a memória, análise e generalização, e ao permitir a descoberta de princípios matemáticos, como a decomposição e a equivalência, propiciando o desenvolvimento de conceitos e habilidades necessárias para aprofundar seus saberes matemáticos.

Você já observou que existem várias maneiras de se calcular?

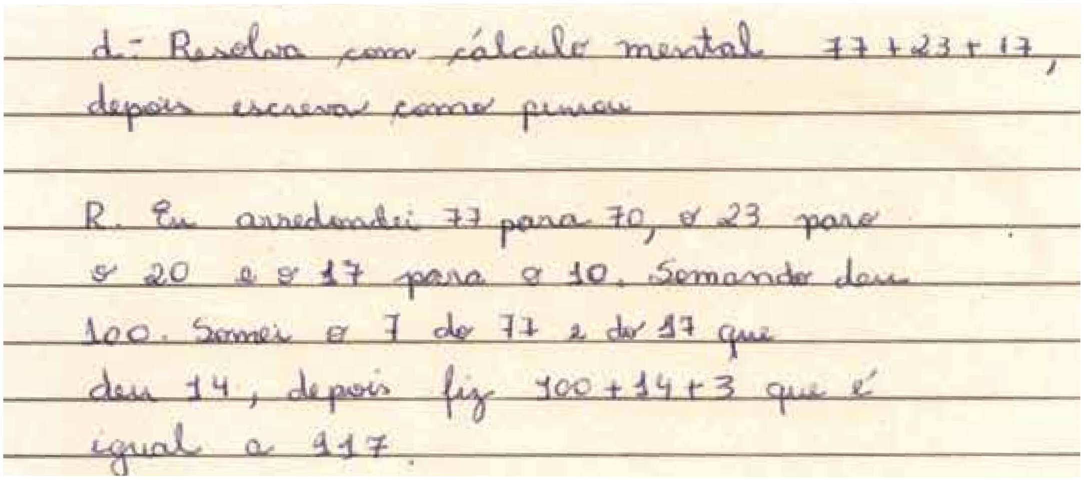
Com o cálculo mental não é diferente. Em geral, as estratégias e procedimentos são diversos e pessoais. Observe três possibilidades de cálculo para resolver a subtração **1000 - 755**:

Resolução A	Resolução B	Resolução C
(Adicionar valores ao minuendo para chegar ao subtraendo)	(Subtrair decompondo o minuendo)	(Utilizar o arredondamento e a compensação para evitar o reagrupamento)
755 + 5 = 760	1000 - 700 = 300	1000 (- 1) = 999
760 + 40 = 800	300 - 50 = 250	999 - 755 = 244
800 + 200 = 1000	250 - 5 = 245	244 (+1) = 245
5 + 40 + 200 = 245		

Você conhece outra maneira de fazer mentalmente a subtração 1000 – 755?

Na sequência, apresentamos os relatos de dois estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental sobre como realizaram o cálculo mental da adição 77 +23 +17:

Fonte: arquivo pessoal das assessoras


d- Resolva com cálculo mental 77+23+17,
depois escreva como pensou

R. Eu arredondei 77 para 70, o 23 para
o 20 e o 17 para o 10. Somando deu
100. Somei o 7 do 77 e do 17 que
deu 14, depois fiz 100+14+3 que é
igual a 117.

Figura 3 - Relato do estudante A

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

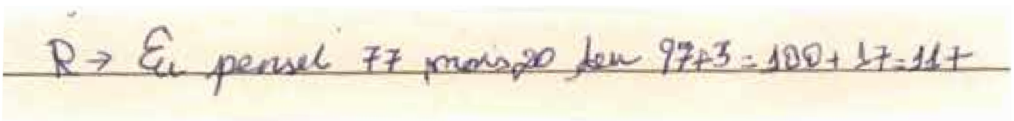

R→ Eu pensei 77 mais 20 deu 97+3=100+17=117

Figura 4 - Relato do estudante B

E você conhece outra maneira de efetuar a adição 77 + 23 + 17?

Na educação básica, as propostas que envolvem cálculo mental devem estar presentes, principalmente por ser um conteúdo que tem recebido pouca atenção nas aulas de Matemática, e apresentar relevância na construção do repertório de cálculo do estudante, assim como as práticas de contagem que não devem se limitar à Educação Infantil, considerando que a contagem é uma das principais ferramentas de cálculo.

Veja a seguir como os estudantes resolvem por meio do cálculo mental a mesma situação problema:

Um procedimento de contagem muito utilizado no cálculo mental é a sobrecontagem. Por exemplo: para resolver a operação 17 + 3 conservamos o maior número (17) e contamos a partir dele para chegar ao resultado (18, 19, 20).

Pense em outros exemplos de procedimentos de contagem presentes no cálculo mental e reflita sobre a sua importância.

Numa caixa há 10 livros de Matemática, 13 de Ciências e 13 de História. Quantos livros há na caixa?

Relato do estudante A (transcrição)

Dá 36 porque somei os três 10 e 3 e 3 que são seis a mais.

Ou seja: 10 + 10 + 10 = 30

3 + 3 = 6

30 + 6 = 36

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Relato do estudante B (transcrição)

Primeiro juntei os 'dez' e depois os 'três' do número 13 e marquei no caderno, daí somei mais 10, deu 36 livros.

Ou seja: 10 + 10 = 20

3 + 3 = 6

26 + 10 = 36

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

O que você observou de diferente nos procedimentos de cálculo dos estudantes?

Como podemos observar, no cálculo mental há estratégias que revelam saberes inerentes ao sistema de numeração decimal, que envolvem procedimentos que exigem o domínio das ordens de grandeza e do valor posicional, bem como da decomposição numérica na substituição dos termos ao realizar o arredondamento e a compensação.

A seguir, alguns exemplos de arredondamento e compensação:

1) Buscar pelo 10	2) Buscar o complemento do 9	3) Buscar pelo complemento do 1
2 + 9 + 4 + 8 + 1	**37 - 19**	**49 + 11**
	+1	+ 9
2 + 8 = 10		
9 + 1 = 10 +	37 - 20 = 17	49 + 20 = 69
20 + 4 = **24**	17 (+ 1) = 18	69 (– 9) = **60**

No primeiro exemplo, realizou-se a busca pelo 10, ou seja, pela dezena "cheia" para facilitar a contagem e finalizar a adição das parcelas. Já no segundo exemplo, ocorreu o arredondamento do número 19 para 20 com acréscimo de 1 unidade, de modo a evitar o recurso do empréstimo nesta subtração, seguido da compensação ao finalizar o cálculo, acrescentando o mesmo valor (+1) para compensar o minuendo, pois o valor a ser subtraído seria 19 e não 20. Por fim, no terceiro exemplo, buscou-se o arredondamento do 11 acrescentando 9 unidades para evitar o recurso da reserva na adição, seguido da compensação, retirando 9 unidades para obter o resultado final.

Analise o Currículo da Cidade e verifique quais são os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento sobre o cálculo mental previstos para o seu ciclo de atuação (Alfabetização, Interdisciplinar e Autoral). Verifique a progressão e especificidades de cada ano.

Em seus estudos, Sequerra (2001) traçou alguns objetivos relativos ao cálculo mental que justificam a importância do seu trabalho em sala de aula:

> Auxiliar os estudantes a construírem e selecionarem procedimentos adequados às situações-problema aos números e às operações;
>
> Desenvolver e sistematizar procedimentos de cálculo por estimativa e estratégias de verificação e controle de resultados;
>
> Utilizar instrumentos de cálculo, decidindo, em cada situação, sobre a pertinência e vantagem que representa sua utilização;
>
> Elaborar e utilizar estratégias pessoais de cálculo mental para a resolução de problemas simples, a partir de seu conhecimento das propriedades do sistema de numeração e das quatro operações básicas;
>
> Valorizar a importância e utilidade das medições e cálculos aproximados em determinadas situações da vida cotidiana, para desenvolver estratégias pessoais. (SEQUERRA, 2001, p.61)

É importante que o trabalho com o cálculo mental aconteça ao longo de todo o Ensino Fundamental, de maneira abrangente e desafiadora, ou seja, orienta-se que o professor modifique as situações que são propostas aos estudantes, como a grandeza dos números consistindo em uma variável decisiva, de modo a exigir novos procedimentos e a percepção dos limites ou inutilidade dos meios anteriormente utilizados.

A partir do 6º ano, é interessante explorar os seguintes conteúdos, indicados por Parra e Saiz (1996), de modo a ampliar o repertório de cálculo dos estudantes.

Representação de números de três ou mais algarismos na reta numérica com escalas de 100 em 100, de 1000 em 1000, etc.

- Cálculo de porcentagens mais usuais: 10%, 25%, 75%, 100%;

Relações mais usuais entre frações e porcentagens, como 25% e ¼;

Escalas crescentes e decrescentes de 0,1 – 0,5 – 1;

Complementos de decimais do inteiro mais próximo, como 25,6 + ...= 26;

Dobros e metades de números decimais;

Estimativas das raízes não exatas de Números Naturais;

Estimativa de comprimentos ou distâncias e superfícies de objetos, lugares e espaços;

Unidades de tempo, escalas crescentes e decrescentes de 15 em 15 minutos a partir de uma determinada hora, cálculo de horários e durações de tempo.

É importante que professor saiba que o trabalho com cálculo mental se dá pela reconstrução e pela tomada de consciência. Na medida em que os estudantes se tornam mais confiantes sobre o que sabem, podem assim reconhecer a utilidade de seus procedimentos de cálculo, percebendo o seu progresso e que são capazes de escolher diferentes recursos, fundamentando suas opções e decisões. Tal consciência pode ser potencializada por trabalhos coletivos, em que os estudantes socializem e discutam seus procedimentos de cálculo.

Até o momento, o texto apresentou alguns aspectos do cálculo mental. Assim, convidamos você para ampliar seus conhecimentos por meio da leitura de outros textos e a apreciação do vídeo.

Assista ao vídeo Números e Operações: Jogos e Etnomatemática. Professores de escolas públicas comentam sobre o uso do cálculo mental em atividades e jogos do universo infantil.
Disponível em: http://univesptv.cmais.com.br/pedagogia-unesp/d-20/numeros-e-operacoes-jogos-e-etnomatematica-1

Cálculo escrito: as quatro operações

Ao ensinar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, no Ensino Fundamental, torna-se primordial possibilitar ao estudante experiências com diferentes estratégias de cálculo, seja o cálculo mental, escrito e com calculadora, mas, antes disto, é importante que o estudante possa realizar registros pessoais, sejam eles, desenhos, esquemas e textos, antes de serem apresentados aos registros formais, denominados algoritmos[1].

Comumente, encontramos adultos que, embora tenham passado pela escola, não compreendem o significado de algumas regras de cálculo.

Atualmente, a maior preocupação dos educadores matemáticos é fazer com que o estudante não memorize regras para realizar técnicas operatórias, sejam elas quais forem, e sim, que as compreenda e saiba explicá-las. Frequentemente, encontramos estudantes que, ao utilizarem os algoritmos formais de adição e subtração, não percebem princípios e propriedades do Sistema de Numeração Decimal, implícitos nos procedimentos de cálculo.

Panizza (2006) nos mostra a importância de considerar as diversas maneiras que os estudantes conhecem e representam o saber matemático. Para isso, é importante que o professor fique atento aos registros e procedimentos de cálculos não convencionais produzidos pelos estudantes. É importante ainda, planejar atividades que mobilizem discussões sobre procedimentos usados em algoritmos alternativos e, posteriormente, relacioná-los com os procedimentos dos algoritmos convencionais.

Considerando tais questionamentos, e outras situações equivocadas em relação aos algoritmos, a nova perspectiva da educação matemática propõe o ensino das quatro operações utilizando inicialmente a decomposição dos números envolvidos, considerando o valor posicional dos algarismos que os compõem.

> Você já pensou por que utilizamos o "vai um" em uma adição ou "pedimos emprestado" em uma subtração? Ou então, por que deixamos uma "casa vazia" ou colocamos o sinal de (+) ao resolver a segunda etapa de uma multiplicação envolvendo números na ordem das dezenas? E ainda, por que ao dividir 347 por 6, dizemos que "3 não dá para dividir por 6", se o algarismo 3 de 347 corresponde a 300?
>
> Reflita sobre essas questões e continue a leitura do texto

> Reflita sobre as questões a seguir e depois continue a leitura do texto:
>
> Como você tem ensinado os algoritmos aos seus estudantes?
>
> Tem privilegiado o trabalho com uma técnica operatória específica ou valorizado diferentes tipos de algoritmos?
>
> Como você justifica aos estudantes o passo a passo utilizado nas técnicas operatórias?

Para resolver operações de adição e multiplicação com "reserva", ou seja, com "vai um", ou subtração com "recurso" ou "empréstimo" é importante que o

1 Consiste em um conjunto de regras aplicáveis em uma ordem determinada, sempre do mesmo modo, independentemente dos dados, para resolução de um problema ou cálculo. O termo algoritmo foi originalmente derivado do nome do grande matemático árabe Mohammed al-Kowarizmi, responsável pela divulgação do uso de numerais hindus no sistema de numeração, utilizado até os dias de hoje.

estudante compreenda situações de agrupamento e reagrupamento, por exemplo, observar que 10 unidades correspondem a 1 dezena, justificando assim, o "vai um" ou melhor "vai uma dezena". Veja alguns exemplos:

Adição

Técnica do "Vai um"	Técnica por decomposição
$\begin{array}{r} & 2\,\overset{1}{6}\,5 \\ + & \underline{3\,0\,8} \\ & 5\,7\,3 \end{array}$	$\begin{array}{rl} + & 200 + 60 + 5 \\ & \underline{300 + 00 + 8} \\ & 500 + 60 + 13 = 573 \end{array}$

Subtração

Técnica do "empréstimo"	Técnica de arredondar e compensar	Técnica por decomposição (apenas para subtração sem reagrupamento)
$\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}}\,\overset{1}{\boxed{0}}\,8 \; - \\ \underline{2\,6\,5} \\ 0\,4\,3 \end{array}$	1000 (-1) – 545 999 - 545 $\begin{array}{r} 9\,9\,9 \; - \\ \underline{5\,4\,5} \\ 4\,5\,4 \end{array}$ (+1) = 455	245 - 124 $\begin{array}{rcl} 200 - 100 & = & 100 \\ 40 - 20 & = & 20 + \\ 5 - 4 & = & \underline{1} \\ & & 121 \end{array}$

Multiplicação

Técnica do "vai um"	Técnica por decomposição (propriedade distributiva)
$\begin{array}{r} 4\,\overset{1}{3}\,6 \\ \underline{x\,2} \\ 8\,7\,2 \end{array}$ $\begin{array}{r} \overset{1}{2}\,5 \\ \underline{x\;1\,3} \\ 7\,5 \\ \underline{{}^{1}2\,5\;+} \\ 3\,2\,5 \end{array}$	$\begin{array}{lr} 2 \times 400 = & 800 \\ 2 \times 30 = & 60\;+ \\ 2 \times 6 = & \underline{12} \\ & 872 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 400 + 30 + 6 \\ \underline{x \quad 2} \\ 800 + 70 + 12 = 872 \end{array}$ $\begin{array}{l} \quad 20 + 5 \\ \underline{x \quad 10 + 3} \\ 100 \quad 60 + 15 \\ \underline{200 + 50} \\ 300 + 10 + 15 = 325 \end{array}$

Divisão

Método curto	Método longo	Método por decomposição (Método americano)
7 4 5 | 1 2 2 5 6 2 1	7 4 5 | 1 2 - 7 2 0 6 2 2 5 - 2 4 1	7 4 5 | 1 2 - 6 0 0 5 0 1 4 5 1 0 + - 1 2 0 2 0 2 5 6 2 - 2 4 1

É comum encontrarmos estudantes de 4º e 5º anos que já sistematizaram os algoritmos convencionais, ainda assim, devemos apresentar-lhes outras possibilidades de técnicas operatórias, com a intenção de que ampliem seu repertório de cálculo e compreendam o significado dos procedimentos que já utilizam. Abaixo, estão algumas operações resolvidas por estudantes do 5º ano, que realizavam as operações convencionalmente e que conheceram as propostas comentadas.

Qual a importância do trabalho com a diversidade de técnicas e algoritmos no ensino das operações?

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

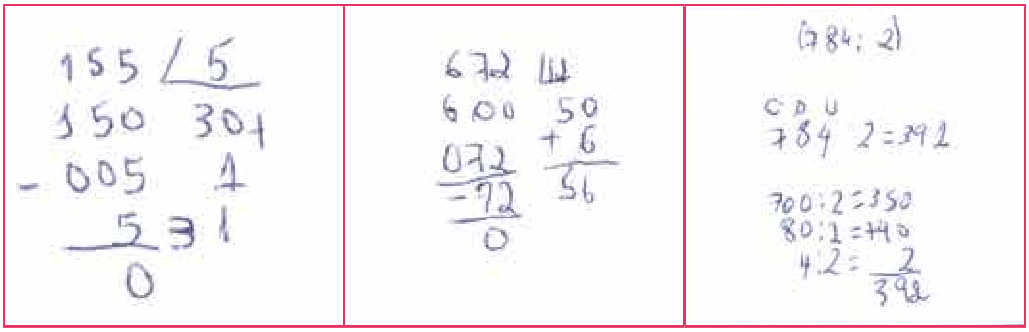


Figura 5 - Alogaritmos da divisão de estudantes do 5º ano

Sabe-se que há diferentes maneiras de resolver um cálculo, a definição do procedimento a ser utilizado dependerá de sua viabilidade e economia de tempo na operação. Mesmo sendo uma decisão pessoal, ela não exime a interferência do professor ao incentivar o estudante a explorar novas possibilidades, favorecendo sua relação com o conhecimento.

A proposta de utilizar a decomposição nos algoritmos considera a importância de o estudante compreender a grandeza numérica dos números que vai operar, de modo a realizar ações conscientes em cada etapa da resolução do algoritmo, por exemplo:

Se vamos dividir 325 reais por 3 pessoas, iniciaremos dividindo 300 reais, depois 25 e sobrará 1 real, ou dividiremos 3 reais, depois 25, sobrando 1 como no algoritmo convencional.

Para saber mais a respeito das operações fundamentais, assista ao vídeo Números e Operações: uma visita à Escola Brasílio Machado. Disponível em: http://univesptv.cmais.com.br/pedagogia-unesp/d-20/numeros-e-operacoes-uma-visita-a-escola-brasilio-machado

É importante problematizar os procedimentos para favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos, realizar discussões durante as aulas sobre como e por que um algoritmo funciona, de modo a promover o desenvolvimento lógico-matemático a níveis mais complexos.

Convém lembrar que, muitos materiais curriculares apresentam os algoritmos com a proposta da decomposição. Dessa forma, o professor necessita estar atento às mudanças metodológicas para transformar seu conhecimento em ensino significativo.

Nos textos sobre Campo Aditivo e Multiplicativo você encontrará mais informações sobre os algoritmos.

O uso da calculadora nas aulas de Matemática

Para contribuir para esta reflexão acerca da importância do uso da calculadora nas aulas de matemática, leia o texto do educador matemático Professor Ubiratan D'Ambrosio para um curso a distância, oferecido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em junho de 2003, no qual compartilha seu ponto de vista a respeito deste tema.

O uso da calculadora nas salas de aula continua sendo questionado por professores, pais, legisladores e, até mesmo, por estudantes. Acham que o uso da calculadora pode afetar a memória e mesmo a capacidade de raciocinar bem. Nada existe, em pesquisa, que justifique esses temores. Atribuo essas atitudes a um excessivo conservadorismo e uma falta de visão histórica sobre como a tecnologia é parte integrante da sociedade e determina os rumos tomados pelas civilizações.

A história nos ensina que só pode haver progresso científico, tecnológico e social se a sociedade incorporar, no seu cotidiano, todos os meios tecnológicos disponíveis. Assim, depois da invenção da escrita, não se pode justificar que alguém se recuse a ler e escrever, depois da invenção da imprensa, não se justifica que alguém não tenha acesso a livros e jornais, depois da adoção, na Europa, da aritmética indo-arábica, não se justificaria alguém se limitando a fazer contas com os ábacos, e assim, desde que há relógios não se justifica exigir que se diga as horas, olhando para o céu, nem se justifica que, existindo automóveis, ônibus e caminhões, se utilize o cavalo como transporte.

A sociedade se organiza em função da tecnologia disponível. E como se justifica continuar operando com a tecnologia da aritmética de papel, lápis e tabuada? Há muitas que reagem à adoção do novo por dúvidas conceituais. Outros recusam com alegações como custo, falta de recursos para a compra de uma calculadora, o que resulta no desvio da atenção para uma questão muito mais grave, que é a pobreza. E com base nessa fixação contra a calculadora, contribuem para que a criança não tenha condições de se incorporar ao mundo moderno. A criança está sendo preparada para utilizar tecnologia velha, que está rapidamente entrando em desuso.

(*Texto extraído dos anais da SBEM jun.2003*)

E você, professor(a), considera a calculadora como uma boa ferramenta para as aulas de Matemática? Com qual frequência você utiliza este recurso em sala de aula?

Reflita sobre essa questão e continue a leitura do texto.

De acordo com D'Ambrosio (2003), mesmo com tantos investimentos em tecnologias de ensino e aprendizagem, o uso da calculadora em sala de aula ainda é um assunto polêmico entre pais e professores.

A calculadora é a tecnologia mais democrática e acessível nos ambientes escolares de todo o Brasil. Proibir o uso da calculadora ou ignorar sua funcionalidade educacional não irá evitar sua utilização pelos estudantes, pois ela está disponível nos lares, comércios e nos aparelhos celulares.

Há mitos e crenças acerca do uso da calculadora, como a suposta dependência do estudante em qualquer situação de cálculo ou a inabilidade no uso de algoritmos, ou seja, em "armar e efetuar" as operações.

Dependendo da maneira como é explorada, a calculadora não toma a decisão sobre as operações a serem realizadas, cabe ao estudante essa escolha, assim como elaborar conjecturas, investigar e estabelecer caminhos lógicos na resolução de cálculos e problemas, ações que revelam o desenvolvimento do raciocínio matemático. O estímulo do professor é fundamental para a maior riqueza das atividades dos estudantes.

É importante a reflexão sobre a grandeza numérica utilizando a calculadora como instrumento para produzir e analisar escritas no sistema de numeração decimal, as relações e propriedades entre os números, além de explorar números racionais. A calculadora também pode viabilizar a resolução de problemas do nos-

Você usa normalmente a calculadora e outras tecnologias em sala de aula? Explora essas tecnologias com seus estudantes? Como?

Faça uma reflexão sobre isso e continue a leitura do texto.

so dia a dia, além de passatempos, brincadeiras e jogos. Tal tecnologia é contemplada nos eixos estruturantes e articuladores propostos pelo documento curricular da Rede de Ensino.

Ao iniciar com os estudantes o uso da calculadora, é importante primeiramente oferecer uma calculadora para cada estudante e, em seguida, explorar o funcionamento básico da máquina. Por exemplo:

Observar que os números estão quase sempre dispostos da mesma maneira: enfileirados, na ordem decrescente, da direita para a esquerda, de cima para baixo;

- Desenhar a calculadora que tem em mãos;
- Descobrir qual a tecla que liga/desliga a calculadora, para que serve a tecla CE, como fazer aparecer no visor o número 25 sem utilizar o algarismo 2; como transformar o número 1048 e 48 realizando apenas uma operação;

Identificar as teclas que indicam as possibilidades de cálculo +, -, x, ÷, % e $\sqrt{\ }$.

O bom uso da calculadora permite ao estudante: concentrar-se no processo de resolução; vivenciar a resolução de problemas e ainda desenvolver estratégias pessoais; elaborar conjeturas, experimentações, verificações e formulação de novas hipóteses, e desenvolver métodos próprios de resolução baseados, por exemplo, na tentativa e erro.

Para isso, é importante haver uma adequação na atividade pedagógica, pois não se introduz simplesmente uma tecnologia sem uma visão conceitual. A utilização da calculadora requer mudanças na postura do professor, nas tarefas que propõe, na metodologia que usa e nas avaliações que faz.

De acordo com Smole et al. (2008), a utilização da calculadora pode modificar a forma de fazer Matemática, o que implica em modificações nas tarefas e problemas tradicionais, além de desenvolver novas formas de pensar matematicamente. “A utilização da calculadora humaniza e atualiza nossas aulas e permite aos estudantes ganharem mais confiança para trabalhar com problemas e buscar novas experiências de aprendizagem” (SMOLE et al., 2008, p.1).

Leia e reflita mais sobre o uso da calculadora e de outras tecnologias e amplie os seus conhecimentos a respeito da temática:
GONÇALVES, Alex Oleandro. Algoritmos das quatro operações: com a palavra o professor. Disponível em: http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4742_2787.pdf. Acesso: 27 de novembro 2017

Operações com Números Naturais: o campo aditivo

O ensino das operações e suas implicações

O ensino das operações sempre esteve em evidência em relação à compreensão do processo de aprendizagem dos significados das operações pelas crianças. Um exemplo é a pergunta que perdura há anos na sala de aula: - *Professor, o problema é de mais ou de menos? De vezes ou de dividir?*

Por muito tempo, as quatro operações fundamentais foram ensinadas com o foco nas técnicas operatórias. Primeiro ensinava-se a operação de adição, depois a subtração, a multiplicação e, por último, a divisão. Após o domínio das habilidades técnicas de cada operação, apresentavam-se problemas para a aplicação dessa operação, sem a preocupação de discutir os seus diferentes usos e significados. Fica evidente que, apesar da sua eficiência operacional, este tipo de abordagem não desenvolve a compreensão acerca das operações em situações reais do cotidiano.

> Que lembranças você tem dos seus antigos professores com relação à resolução de problemas? Que influências isso tem em sua prática?
>
> A leitura do texto pode ajudar nas reflexões sobre o assunto.

Atualmente, com o aumento de pesquisas em Educação Matemática, o ensino das operações tem avançado. Estudos revelam cada vez mais que ensinar as operações por meio de treinamento, sinalizando qual delas resolve o problema, não favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. O processo de aprendizagem da Matemática se inicia a partir da intuição e, progressivamente, aproxima-se da dedução, e essa forma de construir o conhecimento relega a apropriação das operações de modo mecânico.

A importância de atrelar o ensino das operações à resolução de problemas leva ao reconhecimento da importância da exploração de vários procedimentos de cálculos e de diferentes resoluções a partir de situações-problema. Isso significa que resolver problemas não é um mero exercício em que se aplica o que já se sabe, trata-se de um contexto que viabiliza a mobilização de saberes e habilidades que permitem buscar alternativas, levantar hipóteses, formular conjecturas, comparar procedimentos, validar ou refutar resultados para, então, chegar a uma resposta.

> Sendo assim, cabe aqui um importante questionamento: de que adianta dominar os procedimentos de cálculo da adição e subtração, se não há compreensão acerca do seu significado e aplicabilidade em situações cotidianas?
>
> Alguns pressupostos teóricos contribuem para responder esta e outras inquietações presentes no ensino das operações a partir da resolução de problemas. Eles se encontram no texto a seguir.

O ensino das operações de adição e subtração a partir da resolução de problemas

Atualmente a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida pelo pesquisador francês Gérard Vergnaud (1996; 2009) atende à necessidade de ensinar as operações a partir da construção conceitual sobre os seus diferentes significados e das relações envolvidas entre eles. Pesquisador cognitivista, preocupado em compreender como o conhecimento matemático é construído, Vergnaud busca explicar a construção das estruturas operacionais a partir de problemas de diferentes naturezas.

Os problemas do Campo Aditivo compõem o trabalho com o conjunto de problemas aditivos e subtrativos. O pesquisador em questão considera o fato de que as duas operações, de adição e subtração, fazem parte de uma mesma família, ou seja, que há estreitas conexões entre elas, por exemplo, as ações inversas de juntar e separar; acrescentar e retirar; comparar quantidades a mais ou a menos. Vejamos como esses problemas são categorizados.

Exemplos de problemas de composição:

1. Ana tem 10 figurinhas e Júlio 5. Quantas figurinhas Ana e Júlio têm juntos?
2. Fabiana coleciona fichas coloridas. Ela tem 1.587 fichas no total. Dessa coleção 823 são azuis e as outras vermelhas. Quantas são as fichas vermelhas dessa coleção?
3. Ana e Júlio têm juntos 159 figurinhas. Se Ana tem 105 figurinhas. Quantas são as figurinhas de Júlio?

Você costuma trabalhar esse tipo de problema na sala de aula? Qual dos três exemplos você trabalha mais? Por quê?

Problemas de composição estão associados à ideia de juntar ou compor dois estados que inicialmente aparecem separados para se obter uma quantidade total. Este mesmo tipo de problema pode envolver a ideia de separar.

Os **problemas de transformação positiva ou negativa** apresentam algo em comum, uma quantidade inicial que é alterada em relação ao tempo. A diferença está na ação que pode envolver a ideia de acrescentar ou retirar. Portanto, esses tipos de problemas estão associados à ideia de alterar um estado inicial que pode sofrer uma transformação, envolvendo a temporalidade dos fatos: antes e depois, como nos problemas a seguir.

Exemplos de problemas de transformação negativa:

1. Ana tinha 10 figurinhas e deu 5 para Júlio. Com quantas figurinhas Ana ficou?
2. Bernardo coleciona selos. Ele tinha 180 selos e perdeu alguns ficando com 225. Quantos selos Gustavo perdeu?
3. Daniel coleciona tampinhas. Ele perdeu 54 e ficou com 289 tampinhas. Quantas tampinhas ele tinha inicialmente?

Quais diferenças você identifica entre os enunciados? Qual dos três problemas você trabalha com mais frequência na sala de aula?

Os **problemas de comparação de quantidades** envolvem a ideia de ter a mais ou a menos. Geralmente há dificuldade na compreensão deste tipo de problema, pois além de conservar a quantidade maior ou menor, é preciso compreender qual é a ação solicitada para a resolução do problema que envolve identificar a diferença (quantos a mais ou a menos) que não remete apenas à subtração. Para classificar se um problema de comparação é negativo ou positivo, basta observar a pergunta do seu enunciado, se ela referir a "que" ou a "quem" tem mais, trata-se de um problema de comparação positiva:

Exemplos de problemas de comparação positiva:

1. Ana tem 10 figurinhas. Júlio tem 5 figurinhas a mais que Ana. Quantas figurinhas Júlio têm?
2. Daniel tem 225 fotos de aventuras e Rafael tem 289. Quem tem mais figurinhas? Quantas a mais?
3. Júlia tem 5 anos a mais que sua prima Vera. Se Júlia tem 59 anos, quantos anos tem Vera?

De acordo com a sua experiência profissional, quais dificuldades os estudantes apresentam na compreensão e resolução dos problemas de transformação negativa? Por quê?

Se a pergunta estiver relacionada a “que” ou “quem” tem menos, classificamos como problema de comparação negativa:

Exemplos de problemas de comparação negativa:

1. Ana tem 10 figurinhas. Júlio tem 5 figurinhas a menos que Ana. Quantas figurinhas Júlio têm?
2. Daniela tem 225 fotos de seu casamento e Rafaela tem 289. Quem tem menos fotos? Quantas a menos?
3. Júlia tem 5 anos a menos que sua prima Vera. Se Júlia tem 59 anos, quantos anos tem Vera?

Você costuma trabalhar esse tipo de problema com os estudantes?

Para você, a ideia de “quantos a menos” é intuitiva aos estudantes ou comumente apresenta dificuldades para sua compreensão? Como você lida com essas dificuldades?

Problemas de composição de transformação positiva e negativa concentram-se na sucessão ou combinação de ações em um mesmo enunciado que podem variar em: acrescentar e acrescentar; retirar e retirar; retirar e acrescentar; ou acrescentar e retirar em situações que sofrem várias transformações sucessivas.

Exemplos de problemas de composição de transformação positiva e negativa:

1. Ana iniciou o jogo com 12 figurinhas. Na primeira partida, ela ganhou 2 figurinhas e, na segunda partida, perdeu 3. Com quantas figurinhas Ana ficou?
2. Sofia tinha um álbum com 90 fotos com seus primos na praia. Ela colocou nesse álbum mais 12 fotos das férias de verão e 25 das férias de inverno. O que aconteceu com o álbum de fotos de Sofia?
3. No início da festa de Fernanda havia 180 docinhos. Antes dos parabéns, as crianças comeram 25 e, depois dos parabéns, as crianças comeram 108. O que aconteceu com os docinhos da festa de Fernanda?

Você costuma trabalhar esse tipo de problema na sala de aula? Qual dos três exemplos você trabalha mais? Por quê?

Certamente você observou que os enunciados dos problemas representam os mesmos significados em cada quadro, mas nem sempre são resolvidos pela mesma operação, às vezes se resolvem por uma adição, outras vezes por uma subtração. A organização dos enunciados foi proposital, justamente para que se possa identificar que as operações de adição e subtração são correlatas e podem representar o mesmo significado. Isso nos mostra que as operações, quando ensinadas isoladamente, contribuem apenas para o desenvolvimento da técnica de resolução do algoritmo, ou seja, da "conta" e não para o seu significado.

A perspectiva do Currículo da Cidade defende a resolução de problemas como ponto de partida para o ensino das operações e destaca-se a importância de o professor desenvolver problemas envolvendo todos os significados das operações de adição e subtração.

Faça uma reflexão destacando as mudanças que você percebe que precisam ser feitas em função de resultados das leituras propostas, as potencialidades dessas contribuições para a aprendizagem dos estudantes e o papel do professor nesse novo contexto.

Um bom exemplo da importância de se ensinar as operações a partir de situações-problema é a contradição da ideia, comumente disseminada, de que os problemas de adição são mais fáceis de resolver do que os problemas de subtração. Vejamos o seguinte enunciado: Igor deu 10 figurinhas para Lucas e ficou com 6 figurinhas. Quantas figurinhas Igor tinha? A análise do enunciado nos mostra o contrário: apesar da resolução do problema envolver uma adição (10+6=16), apresenta-se como uma situação complexa para a criança, uma vez que a palavra "deu" remete à ação de subtrair, diminuir (?-10=6). Por isso, enfatizar as palavras que representam a ação no enunciado dos problemas não é uma boa intervenção didática, pois nem sempre são condizentes com a operação necessária para a sua resolução. Agindo dessa maneira, o professor poderá induzir o estudante ao erro.

Na prática do professor é preciso destacar especial atenção para a posição do termo desconhecido e para a importância de se trabalhar com problemas variando a posição desse termo, além da exploração de todos os significados dos problemas do Campo Aditivo. Assim, um problema envolvendo um significado pode ser alterado segundo a variação da posição da incógnita. Veja o exemplo:

Gustavo tinha 6 figurinhas. Ganhou de seu padrinho 12. Com quantas figurinhas ficou?

Esse é um problema de transformação positiva em que a criança faria uma adição: 12 + 6 = 18 para resolvê-lo. Ele pode ser modificado da seguinte forma:

Gustavo tinha 6 figurinhas. Ganhou algumas de seu padrinho ficando com 18 figurinhas. Quantas figurinhas ganhou de seu padrinho?

Este também é um problema de transformação positiva. Só que na sua resolução a criança faria uma subtração para encontrar a quantidade de figurinhas que o padrinho de Gustavo deu, ou seja, a criança deveria encontrar o valor que adicionado a 6 resultaria em 18:

6 + ____ = 18 ou 18 – 6 = 12

Esse mesmo problema poderia ter outra variação com a busca da quantidade inicial:

> Gustavo tinha algumas figurinhas. Ganhou 12 de seu padrinho ficando com 18 figurinhas. Quantas figurinhas Gustavo tinha inicialmente?

Como o problema anterior, este também é um problema de transformação positiva. Só que sua resolução requer uma subtração para encontrar a quantidade de figurinhas que Gustavo tinha inicialmente, ou seja, encontrar o valor que adicionado a 12 resulta em 18:

____ + 12 = 18 ou 18 – 12 = 6

Das três variações deste problema, este último é o mais difícil para resolver, pois o ponto de apoio inicial é desconhecido. Assim, é importante observar que mesmo um problema de transformação positiva pode ser resolvido por uma subtração. Também é importante destacar que a criança nem sempre se utiliza da subtração no caso desses dois últimos problemas. Ela os resolve aditivamente, ou seja, se Gustavo tinha 6 e ganhou algumas, a criança vai contando aditivamente a partir do 6 até chegar no 18 obtendo as 12 figurinhas que ganhou de seu padrinho.

> Analise os problemas a seguir e faça duas transformações da posição da incógnita em cada um deles para obter outros problemas com o mesmo significado:
>
> 1. Num aquário há 8 peixinhos vermelhos e 12 peixinhos azuis. Quantos peixinhos há nesse aquário?
> 2. Bernardo coleciona selos. Ele tinha 15 selos e ganhou 24 de seu tio. Com quantos selos ele ficou?
> 3. Rafael mede 150 cm e seu irmão mede 10 cm a menos que ele. Quanto mede o irmão de Rafael?

Os problemas apresentados neste texto envolvem situações bem simples e dados numéricos elementares para que se observe, acima de tudo, os significados envolvidos. A ordem de grandeza dos números deve ser ampliada de acordo com o ano de escolaridade em que os problemas estão sendo trabalhados.

Faça uma reflexão destacando que mudanças precisam ser feitas em função de resultados das leituras, as potencialidades dessas contribuições para a aprendizagem dos estudantes e o papel do professor nesse novo contexto.

É importante lembrar que os problemas do Campo Aditivo necessitam ser desenvolvidos durante todos os anos de escolaridade do Ensino Fundamental. No Ciclo de Alfabetização, o Currículo da Cidade foca nos problemas de composição e de transformação com Números Naturais. No Ciclo Interdisciplinar, o documento amplia os significados já trabalhados e acrescenta os problemas de comparação com Números Naturais. Amplia situações-problema que envolvem o campo numérico também para os números racionais na representação decimal. No Ciclo Autoral, todos esses significados são mantidos e há ampliação dos campos numéricos incluindo os números inteiros, racionais na forma fracionária e reais.

Cabe ainda comentar que o uso da nomenclatura proposta por Vergnaud é importante para o professor identificar o significado de cada problema, mas que não deve ser trabalhada com as crianças.

A seguir apresentamos um quadro síntese dos significados das operações de adição e subtração segundo Vergnaud:

Significados	Busca do termo Final	Busca do termo Intermediário	Busca do termo Inicial
Composição	Em um jardim há 8 rosas brancas e 6 rosas amarelas. Quantas rosas há no jardim?	Em um jardim há 14 rosas, 8 são brancas. Quantas são as amarelas?	Em um jardim há 14 flores, algumas rosas brancas e 6 rosas amarelas. Quantas rosas brancas há no jardim?
Transformação Positiva	Bernardo coleciona tampinhas. Ele tinha 12 tampinhas. Ganhou 7 de sua tia. Quantas tampinhas ele tem agora?	Bernardo coleciona tampinhas. Ele tinha 12, ganhou algumas e ficou com 19. Quantas tampinhas ele ganhou?	Bernardo coleciona tampinhas. Ele tinha algumas, ganhou 7 e ficou com 19. Quantas tampinhas ele tinha inicialmente?
Transformação Negativa	Luiza coleciona chaveiros. Ela tinha 12 e deu 7 para sua prima Maria Fernanda. Com quantos ela ficou?	Luiza coleciona chaveiros. Ela tinha 19, deu alguns para sua prima e ficou com 12. Quantos chaveiros ela deu para sua prima?	Luiza coleciona chaveiros. Ela tinha alguns deu 7 para sua prima e ficou com 12. Quantos chaveiros ela tinha inicialmente?
Comparação Positiva	Júlio tem 20 figurinhas e Celso tem 8 figurinhas. Quantas figurinhas Júlio tem a mais que Celso?	Júlio tem 20 figurinhas e Celso tem 8 figurinhas a mais que Júlio. Quantas figurinhas têm Celso?	Júlio tem algumas figurinhas e Celso tem 13. Se Júlio tem 6 figurinhas a mais que Celso, quantas figurinhas têm Júlio?

Comparação Negativa	Gustavo tem 20 bolinhas de gude e Murilo tem 8. Quantas bolinhas de gude, Murilo tem a menos que Gustavo?	Gustavo tem 20 bolinhas de gude e Murilo tem 8 a menos que Gustavo. Quantas bolinhas têm Murilo?	Gustavo tem algumas bolinhas de gude e Murilo tem 13. Se Murilo tem 6 a menos que Gustavo, quantas bolinhas têm Gustavo?

O quadro a seguir apresenta a composição de transformações segundo Vergnaud:

Composição de transformações	**Transformação Positiva**	**Transformação Negativa**
Transformação Positiva	Sofia coleciona pulseiras. No seu aniversário, Sofia ganhou 17 pulseiras na festa e ganhou 8 de sua mãe. O que aconteceu com sua coleção de pulseiras no aniversário dela?	Sofia coleciona anéis. No seu aniversário, ela ganhou 17 anéis, mas perdeu 8 de sua coleção, pois não serviam mais a ela. O que aconteceu com a coleção de anéis de Sofia?
Transformação Negativa	Hoje pela manhã Rafael perdeu 8 figurinhas num jogo de bafo e à tarde ganhou 17. O que aconteceu com suas figurinhas hoje?	Hoje pela manhã Rafael perdeu 8 figurinhas num jogo de bafo e à tarde perdeu 17. O que aconteceu com suas figurinhas hoje?

Esses quadros-síntese facilitam a compreensão dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento referentes a esse tema e podem dar pistas dos tipos de problema.

Cabe destacar que, de acordo com Curi (2004), algumas tentativas de levar essa teoria para a sala de aula têm se limitado a reproduzir as diferentes categorias de problemas propostos, o que evidentemente é um reducionismo em relação aos avanços que a teoria permite. A autora salienta que, embora seja muito positivo o fato de se utilizarem dados de pesquisas para orientação de ensino, ainda estamos longe de vermos resultados desses estudos chegarem à sala de aula.

Sobre a adição e subtração

A adição de Números Naturais é uma operação matemática que associa a dois Números Naturais dados (comumente chamados parcelas) um número natural que é a sua soma.

Sempre é possível achar um número natural que é a soma de outros dois Números Naturais, motivo pelo qual, em Matemática, se diz que a adição tem a **propriedade do fechamento, ou seja**,

a + b = c

Além dessa, a adição é uma operação que agrega outras propriedades, a saber:

Propriedade associativa: dados três Números Naturais quaisquer, a, b e c, tanto faz associar os dois primeiros ou os dois últimos, pois o resultado não se altera, ou seja,

(a + b) + c = a + (b + c)

Propriedade comutativa: dados dois Números Naturais quaisquer, a e b, a ordem das parcelas não altera o resultado, ou seja,

a + b = b + a

Propriedade do elemento neutro: o elemento neutro da adição é o zero, pois adicionando-se qualquer número ao zero, o resultado é o próprio número, ou seja, não se altera. Dado um número natural a,

a + 0 = 0 + a = a

Já a subtração, embora seja comumente denominada como operação, não pode ser formalmente assim considerada pelo fato de que nem sempre é possível achar um número natural que seja a diferença (resto ou excesso) de outros dois Números Naturais, ou seja, **a subtração não tem a propriedade do fechamento, no conjunto dos Números Naturais**.

Ela também não vislumbra das outras propriedades que destacamos para a adição:

Não é associativa, pois (7 - 6) - 5 ≠ 7 - (6 - 5)

Não é comutativa, pois 6 - 5 ≠ 5 - 6

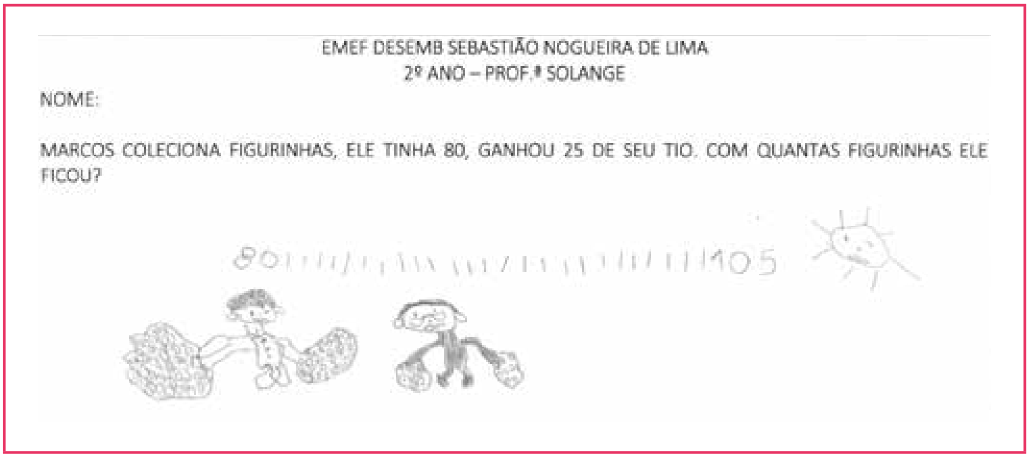
Não tem o zero como elemento neutro, pois 6 - 0 ≠ 0 - 6 ≠ 6

A subtração com Números Naturais resolve situações-problema particulares que envolvem dois Números Naturais (que são denominados minuendo e subtraendo), em que é preciso e possível determinar o resto, o excesso ou a diferença entre eles.

Estratégias usadas na resolução de problemas por crianças do Ciclo de Alfabetização

Para Vece (2012), o ensino das operações a partir da resolução de problemas requer a valorização das estratégias pessoais antes de chegar à formalização do algoritmo convencional.

A ilustração a seguir revela o trabalho integrado com cálculo e resolução de problemas, em que uma criança do 2° ano com oito anos de idade resolve um problema usando procedimentos próprios, por meio de contagem oral.



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora Solange de Fátima S. Mariano

Figura 6 - Registro de resolução de problema do 2° ano

A estratégia apresentada para a resolução do problema anterior não é única. Conforme Chapin e Johnson (2006), para os enunciados dos problemas aditivos, as crianças tendem a usar três tipos de estratégias: as estratégias baseadas na modelação direta com materiais manipuláveis, aquelas relacionadas às sequências numéricas e as estratégias que recorrem às sentenças matemáticas.

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora Janaina Pinheiro Vece

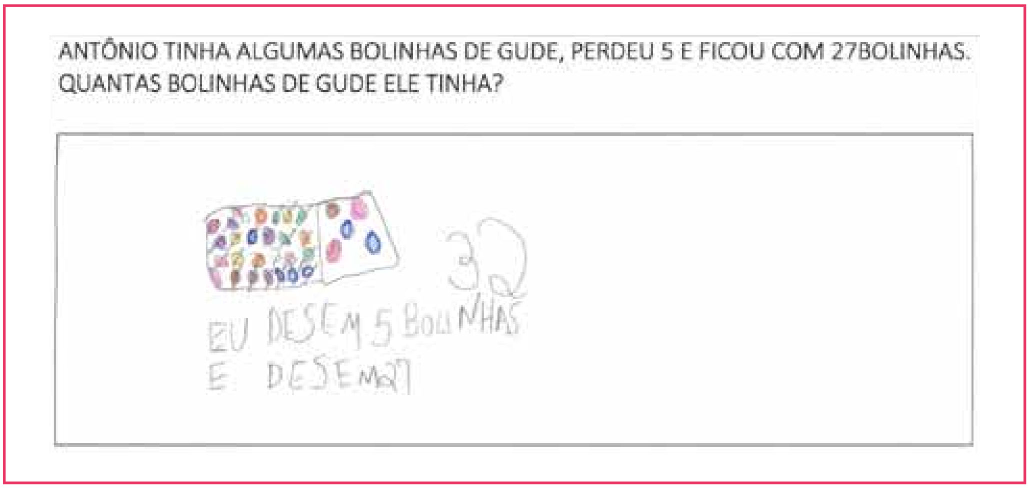


Figura 7 - Estratégia 1 de resolução de problema - 1° ano

Para a resolução do problema, essa criança recorreu à estratégia de modelação, juntando tudo. Nesta estratégia é comum recorrer aos objetos físicos, dedos e desenhos para agrupar dois termos do problema. Para chegar ao resultado, as crianças contam a quantidade de elementos dos dois conjuntos.

Para resolver problemas, as crianças do Ciclo de Alfabetização recorrem geralmente às estratégias baseadas na modelação direta, ou seja, precisam de materiais manipuláveis e/ou representações pictóricas (desenhos, representações e esquemas) para resolver.

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora Janaina Pinheiro Vece

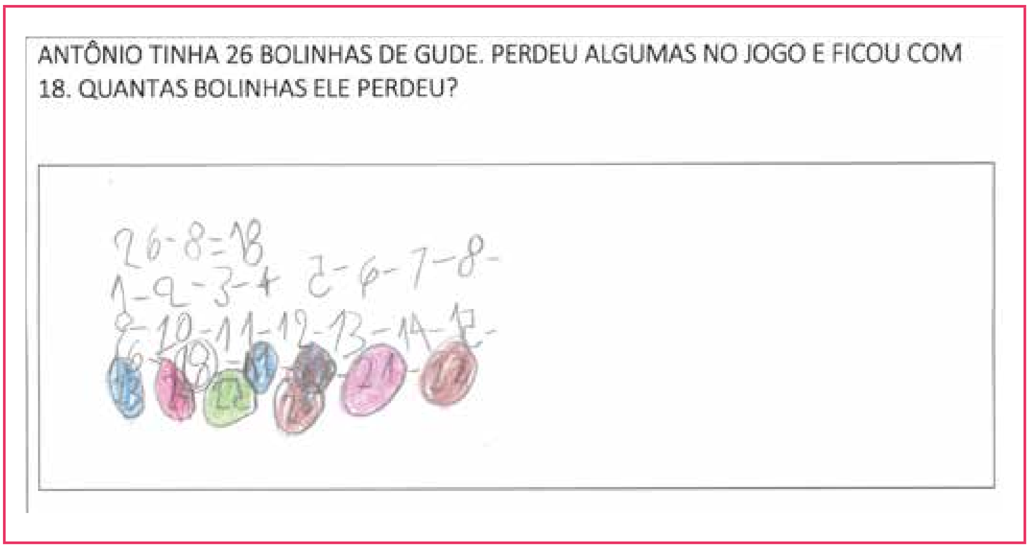


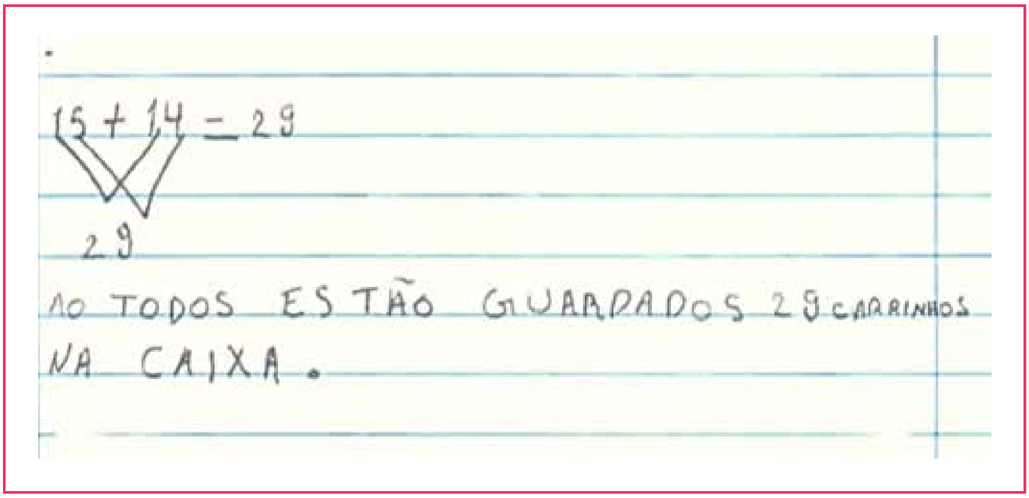
Figura 8 - Estratégia 2 de resolução de problema - 1° ano

Uma das estratégias de contagem para problemas que envolvem a subtração é a denominada pelos autores em questão de *contagem regressiva para*. A criança representa, a partir da sequência numérica, a quantidade total (26), realiza a contagem regressiva para chegar à quantidade menor (18) expressa no enunciado.

Para tornar a resposta evidente ao final, destaca na sentença matemática (26 – **8** = 18) a quantidade de números contados na sequência (8). A *contagem regressiva para*, tanto realizada por modelação direta ou por sequência numérica, exige a compreensão de que a quantidade extraída se refere à resposta. A contagem regressiva é um tanto quanto elaborada, pois, para chegar à resposta, a criança precisa ter pleno domínio da sequência numérica ordenada, o que justifica a importância do trabalho articulado entre as práticas de contagem, os números e as operações fundamentais.

Outra estratégia possível para os problemas deste tipo é a sobrecontagem. Neste tipo de contagem conserva-se a menor quantidade (18) e, a partir do número seguinte, conta-se quantos faltam para chegar ao maior (26), ou seja, à diferença entre as quantidades (8).

Outra estratégia utilizada é a sentença matemática. Ela é usada geralmente por estudantes do Ciclo Interdisciplinar.



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora Simone Dias da Silva

Figura 9 - 4º ano do Ensino Fundamental

A sentença é uma estratégia de resolução que se aproxima da linguagem formal da Matemática. No registro destaca-se a importância do cálculo por decomposição. A complexidade inerente à resolução de problemas envolve interpretação e mobilização de saberes.

É importante destacar que as estratégias de resolução não se esgotam, depende do tipo de enunciado do problema. Por isso, o trabalho com a diversidade dos problemas do Campo Aditivo e a análise dos registros e estratégias de resolução é crucial na prática do professor. Embora as sentenças matemáticas sejam mais usadas no Ciclo Interdisciplinar, elas também surgem no Ciclo de Alfabetização. Há necessidade no Ciclo Interdisciplinar de sistematização dos procedimentos de resolução de problemas do campo aditivo e mesmo do uso de algoritmos que serão discutidos a seguir.

Você já observou que tipo de estratégias os estudantes usam na resolução de problemas do campo aditivo? Faça uma lista das mais usadas e compare com as estratégias apresentadas no texto. Reflita sobre as possibilidades de intervenção para o avanço das estratégias de resolução dos estudantes.

Algoritmos das operações de adição e subtração

Os algoritmos, sejam eles feitos em papel ou com recurso às tecnologias (calculadora ou computador), são usados quando uma resposta para um cálculo exato é necessária e uma estimativa não é o suficiente. Por serem generalizações que permitem resolver classes de problemas, são imprescindíveis, pois permitem resolver tarefas semelhantes, por exemplo, 1.345.678 – 987.654 ou 134 – 98, utilizando um processo.

Existem muitos algoritmos diferentes para executar operações com Números Naturais. Alguns desses algoritmos são chamados de padrão ou convencional, simplesmente porque eles foram ensinados na maioria das salas de aula nos últimos 50 anos ou mais. Por exemplo, você pode ter aprendido (ou mesmo ensinado) o algoritmo da adição em que se “carrega” ou “troca” da coluna da unidade para a coluna das dezenas e, depois, para a coluna das centenas:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 456 \\ +899 \\ \hline 1355 \end{array}$$

Curiosamente, alguns dos algoritmos convencionais nos Estados Unidos não são os algoritmos padrões na Europa ou América do Sul. Crianças em todo o mundo aprendem diferentes algoritmos na escola.

Alguns algoritmos são conhecidos como algoritmos alternativos ou intermediários que diferem dos algoritmos padrões. São também precisos, confiáveis e rápidos e fazem parte das aulas de Matemática. Compreender os algoritmos pode ser instrutivo; os estudantes descobrem por que certos procedimentos funcionam, o que leva a um entendimento de ideias importantes, tais como valor posicional e as propriedades das operações.

Nos anos 1990, muitos pesquisadores e educadores matemáticos começaram a questionar o ensino de memorização de algoritmos convencionais para os estudantes do Ensino Fundamental. As pesquisas mostram que quando as crianças memorizam os passos para resolver uma adição ou subtração, perdem o conceito de valor de posição do algarismo no número. No entanto, os estudantes que usam seus próprios procedimentos ou algoritmos para resolver problemas de adição e subtração têm um entendimento muito melhor de valor posicional e encontram soluções mais precisas.

O Currículo da Cidade sugere que as crianças se utilizem da decomposição dos números para fazer adições e subtrações. Quando o estudante utiliza a decomposição de um número para fazer essas operações, compreende melhor o uso dos algoritmos.

Analise os procedimentos para a resolução do cálculo 567 +259:

567 + 259 = (500 + 60 + 7) + (200 + 50 + 9) =

(500 + 200) + (60 + 50) + (7 + 9) =

700 + 110 + 16 = 826

Com base nesses procedimentos, o professor pode intervir e apresentar o algoritmo alternativo a seguir:

$$\begin{array}{r} 500 + 60 + 7 \\ \underline{+\ 200 + 50 + 9} \\ 700 + 110 + 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ \underline{+\ 110} \\ 826 \end{array}$$

A partir desse algoritmo alternativo, o estudante pode compreender melhor o algoritmo padrão:

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1} \\ 567 \\ +259 \\ \hline 826 \end{array}$$

Analise os procedimentos para realização da subtração 63 – 18

63 – 18 = (50 + 13) – (10 + 8)=

(50 – 10) + (13 – 8) =

40 + 5 = 45

Com base nesses procedimentos, o professor pode intervir e apresentar o algoritmo a seguir:

$$\begin{array}{rr} {}^{5} & {}^{1} \\ 6 & 3 \\ -1 & 8 \\ \hline 4 & 5 \end{array}$$

Nas escolas, frequentemente associa-se o estudo de algoritmos com resolução em papel e lápis. Uma utilidade dos algoritmos no papel é que eles fornecem um registro dos processos para a resolução do problema. Os estudantes podem usar esse registro para aperfeiçoar os procedimentos, compartilhar o que foi realizado e refletir sobre soluções. Manter um registro das etapas de um algoritmo é especialmente importante quando os estudantes estão tentando entender o raciocínio por trás do cálculo.

Leia os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento referentes às operações de adição e subtração e verifique se eles abrangem os significados dessas operações em cada ciclo. Tenha por base os quadros 1 e 2 com a síntese dos problemas.

O texto apresentado indica alguns aspectos importantes a respeito do ensino de problemas do campo aditivo. Eles podem ser ampliados com leituras de outros textos que discorrem sobre o tema, como o indicado a seguir.

Leia o artigo Resolução de problemas de estrutura aditiva: a compreensão de uma professora de primeira série, de Alex Oleandro Gonçalves (UFPR). Este artigo traz elementos da prática de sala de aula que caracterizassem conceitos teóricos referentes ao campo das Estruturas Aditivas, analisando os problemas e atividades propostos.
Disponível em: http://docplayer.com.br/20130321-Resolucao-de-problemas-de-estrutura-aditiva-a--compreensao-de-uma-professora-de-primeira-serie.html

Operações com Números Naturais: o campo multiplicativo

Introdução

O texto em questão tem o propósito de apresentar as categorizações feitas por Vergnaud (2009) referentes aos problemas do Campo Multiplicativo.

No tempo que muitos professores em atuação cursaram a educação básica, o ensino das operações de multiplicação e divisão era organizado passo a passo, de maneira linear e hierárquica: primeiro as tabuadas eram ensinadas até serem amplamente decoradas; depois é que se introduzia o ensino dos algoritmos, aumentando gradativamente a ordem de grandeza dos números e, por último, eram apresentados problemas que poderiam ser resolvidos pelas operações de multiplicação ou por divisão, com base em problemas-modelo e outros muito parecidos para resolução.

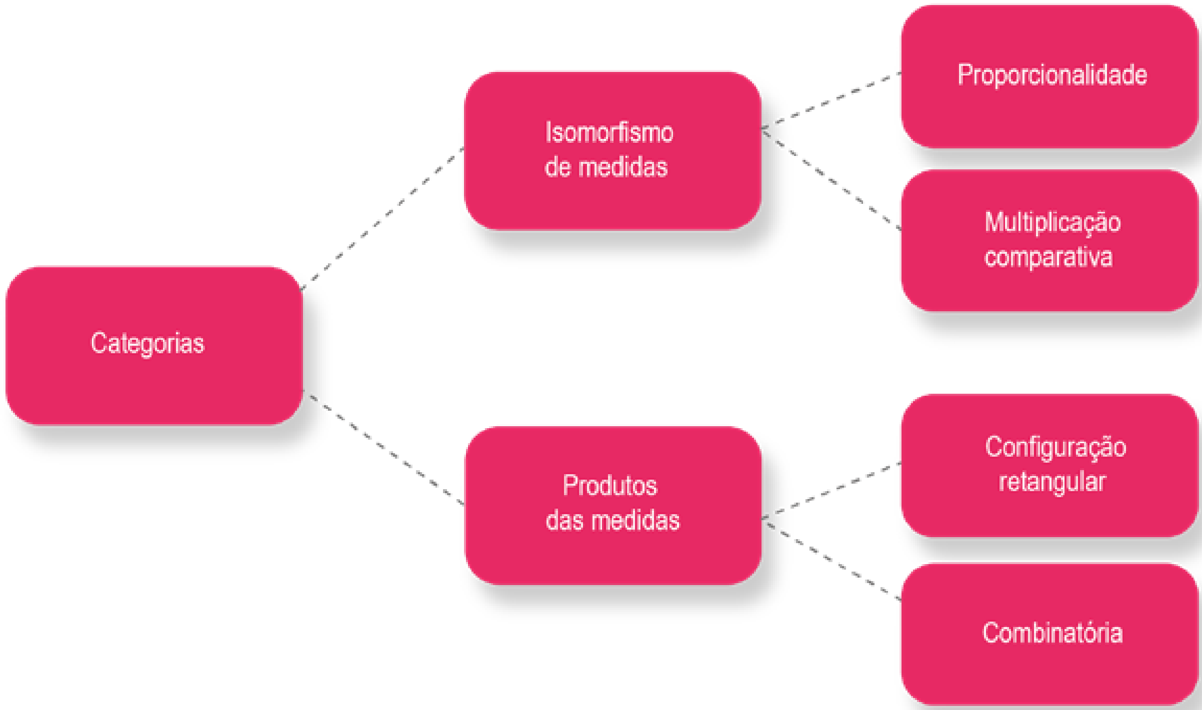
> Pense na sua escolarização básica e relembre como foram ensinadas as operações de multiplicação e divisão. Reflita sobre o que mais chamou a sua atenção e depois faça a leitura do texto articulando-o com suas lembranças.

Atualmente o ensino da multiplicação e divisão valoriza a compreensão de conceitos, por isso, configura-se em uma nova lógica, tendo como ponto de partida problematizações em que a criança utilize procedimentos pessoais para resolvê-las, propõe o estudo de regularidades e dos fatos básicos da multiplicação/divisão para então iniciar o trabalho com os algoritmos. As problematizações envolvendo as operações do campo multiplicativo devem oferecer aos estudantes diferentes significados e contextos variados adequados às diferentes ideias multiplicativas.

As pesquisas de Vergnaud (2009) consideram que o sujeito é capaz de estabelecer conexões entre várias situações, as quais não se relacionam a um único conceito, e de perceber que um conceito não se resume a uma única situação. Por meio dessas conexões, o autor afirma que é possível reestruturar sua organização de pensamento, dando oportunidade a novas formas de raciocínio, que contribuirão para a evolução do pensamento no âmbito de um Campo Conceitual.

Segundo Vergnaud (2009), há duas grandes categorias de problemas do campo multiplicativo que ele denomina de Isomorfismo de Medidas e Produto de Medidas. Ele classifica todos os tipos de problema de multiplicação e divisão nessas categorias, desde que estudadas ao mesmo tempo e de forma indissociável. Baseado nos estudos de Vergnaud (2009), os documentos curriculares anteriores: Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL,1997) e as Orientações Curriculares e Proposição de Expectativas de Aprendizagem da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo (2007) apresentam uma organização dos problemas do campo multiplicativo que subdivide essas categorias.

O esquema apresenta a categorização do campo multiplicativo apresentada nos documentos citados.



É importante ressaltar que esses documentos curriculares incluíam o que se denomina de multiplicação comparativa que abrange as ideias de dobro, triplo, metade, terça parte, duas vezes mais, três vezes mais e etc., que não deixam de envolver o significado de proporcionalidade. O Currículo da Cidade se utiliza das duas categorias propostas por Vergnaud (2009), abrangendo o significado de Proporcionalidade (Isomorfismo de Medidas) e de Configuração Retangular e de Combinatória (Produto de medidas).

Você já teve conhecimento sobre as categorizações dos problemas do campo multiplicativo? Quais lhe são mais familiares?

Vejamos quais são os significados e os conceitos envolvidos em cada uma dessas categorias.

Isomorfismo de medida

Vergnaud (2009) refere-se ao isomorfismo de medidas como uma estrutura que consiste numa proporção direta simples entre duas grandezas, por exemplo, pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância. Dentro desta estrutura distingue situações de multiplicação envolvendo proporcionalidade.

Significado de Proporcionalidade

Os problemas mais simples do campo multiplicativo implicam em uma proporção direta simples de duas variáveis, uma em relação à outra, é o que alguns autores denominam de relação “um a muitos”. Mas há situações de proporcionalidade que envolvem a relação “muitos a muitos” ao invés de “um a muitos”. Os problemas a seguir exemplificam os dois tipos de relação:

“Um a muitos”	“Muitos a muitos”
Giovana toma 2 copos de leite por dia. Quantos copos de leite ela toma em uma semana? 1______ 2 7 ______ ?	Uma torneira enche um tanque com capacidade de 480 litros em 4 horas. Quantos litros de água ela despeja em 8 horas? 4_______480 8_______ ?
Fonte: Dante, Projeto Ápis, 2011 p. 197 (2º ano).	Fonte: Dante, Projeto Ápis, 2011 p. 199 (4º ano).

Evidentemente os problemas de relação “um a muitos” são mais fáceis de serem resolvidos pelos estudantes. Se Giovana toma 2 copos de leite por dia, em 7 dias, basta multiplicar 2 x 7, ela toma 14 copos de leite. Já na relação de “muitos a muitos”, o estudante precisa perceber a proporcionalidade entre o número de horas, ou seja, se em 4 horas a torneira despeja 480 litros de água, em 8 horas (o dobro do tempo) ela vai despejar o dobro da quantidade, 960 litros. Muitos estudantes sentem a necessidade de reduzir a 1, ou seja, dividir 480 com duas operações na busca de encontrar a relação de “um a muitos”.

Na maioria das vezes, as crianças no início da escolaridade resolvem esses problemas por procedimentos pessoais, usando desenhos ou esquemas para mostrar seu raciocínio. Às vezes, resolvem aditivamente ou subtrativamente, não apresentando indicações de usar o raciocínio multiplicativo. No entanto, é preciso evoluir. Pesquisadores afirmam que a evolução do raciocínio multiplicativo se dá pelo envolvimento das crianças com os vários significados da multiplicação e com os contextos adequados a esses significados.

Significado de Multiplicação comparativa

Ainda com significado de proporcionalidade, os problemas a seguir envolvem as ideias de multiplicação comparativa, com a utilização dos termos dobro, triplo e terça parte. Embora esses termos sejam matemáticos, estão incorporados em situações do cotidiano.

Wilson, Wanda e Wagner são irmãos. Wagner tem 5 anos, Wanda tem o dobro da idade de Wagner, e Wilson tem o triplo da idade de Wagner. Quantos anos Wilson têm?

Fonte: Adaptado: CENTURIÓN, M. R. Porta Aberta: Matemática. São Paulo: FTD, 2008/2011

No Ciclo de Alfabetização, as crianças resolvem esse tipo de problema por estratégias pessoais, no geral usando desenhos, agrupando a quantidade de um elemento e depois usando a relação comparativa e indicando "quantas vezes mais" se repete aquele agrupamento.

Vergnaud (2009) considera que problemas da categoria de Proporcionalidade podem ser ensinados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir do Ciclo de Alfabetização. Ele considera que os problemas da categoria de Produtos de medidas são mais complexos e podem ser ensinados mais ao final dessa etapa da escolarização, no Ciclo Interdisciplinar.

Produto de medidas

Passamos agora aos problemas da categoria produto de medidas. Estudos mostram que o pensamento multiplicativo só se desenvolve quando os estudantes resolvem e compreendem os problemas dessa categoria, já que requerem apenas a ideia de multiplicação para resolvê-los, enquanto os problemas de proporcionalidade também podem ser resolvidos com adições de parcelas iguais, no caso da relação "um a muitos".

Significado de configuração retangular

Essas situações envolvem, no geral, objetos organizados em linhas e colunas numa espécie de retângulo. O total de objetos corresponde ao produto do número de objetos dispostos em uma fileira pelo número de objetos dispostos em uma coluna. Os contextos que propiciam esse significado podem ser caixas de frutas, ovos, poltronas de auditórios, teatros, etc. Esse tipo de problema permite a compreensão da noção de área de uma superfície retangular como produto de suas medidas.

Observe as placas de vidro na janela. Vamos descobrir quantas são as placas?

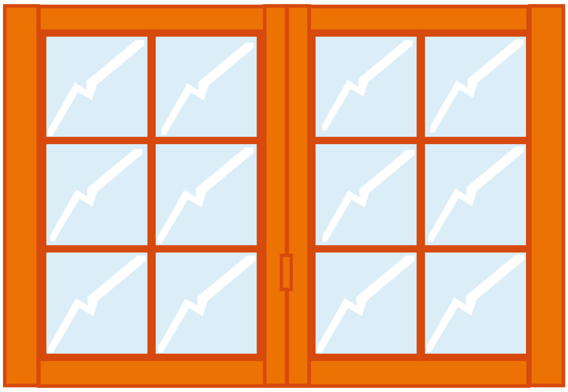


Figura 10 - Noção de área

Fonte: Adaptado: CENTURIÓN, M. R. Porta Aberta: **Matemática**. São Paulo: FTD, 2008/2011. p, 120 (3º ano)

No Ciclo de Alfabetização, as crianças resolvem esse tipo de problema por estratégias pessoais, no geral usando desenhos de retângulos e indicando as fileiras e as colunas. No início recorrem à contagem de todos os elementos, após algum tempo, contam os elementos da fileira e os da coluna e os multiplicam.

Treffers e Buys (2001) afirmam que o modelo que mais se aproxima da operação de multiplicação, do ponto de vista formal, é o de configuração retangular. Por esse motivo, a importância de se trabalhar com esse tipo de problema, conforme previsto no Currículo da Cidade - Matemática, iniciando o trabalho no 3º ano, ao final do Ciclo de Alfabetização, ampliando-o e sistematizando-o no Ciclo Interdisciplinar.

Significado de combinatória

Como o próprio nome já diz, para determinar o resultado desse tipo de problema é preciso fazer todas as combinações possíveis entre os todos os termos. Os contextos apropriados para esse tipo de problema envolvem combinações de roupas, de sanduíches, de tipos de alimentação, etc.

Uma lanchonete oferece 3 tipos de pastéis (carne, queijo e palmito) e 4 tipos de sucos (laranja, uva, morango e acerola). Quantas são as possibilidades de escolha de um pastel e um suco?

Fonte: Dante, Projeto Ápis, 2011 p. 77 (5º ano).

As crianças tentam resolver esse tipo de problema apoiadas em desenhos e esquemas, nos quais ligam cada elemento do primeiro conjunto com todos os elementos do segundo conjunto e depois contam quantas ligações fizeram. Nem sempre obtêm êxito, pois, às vezes, esquecem de fazer alguma correspondência ou se atrapalham nas contagens.

Treffers e Buys (2001) revelam que contextos que envolvem o significado de combinatória podem ser resolvidos com auxílio de esquemas, de árvores ou de tabela de dupla entrada e que também possibilita a validação da propriedade comutativa em que a ordem dos fatores não altera o produto (resultado). Por exemplo: 2 x 3 = 6 assim como 3 x 2 = 6.

Ressaltamos a importância dos contextos próprios para esse tipo de problema, pois se tornam facilitadores na compreensão e elaboração dos procedimentos matemáticos a serem usados na sua resolução, bem como o uso de novas estratégias.

Na escola, os significados do campo multiplicativo mais trabalhado são os de proporcionalidade e de multiplicação comparativa. Abordagem equivocada, uma vez que é preciso trabalhar com todos os significados e com contextos adequados para que os estudantes se apropriem do raciocínio multiplicativo.

O Currículo da Cidade - Matemática, por meio dos objetivos de aprendizagem recomenda o trabalho com todos os significados dos problemas do campo multiplicativo. Inicia no Ciclo de Alfabetização com os problemas que envolvem o significado de proporcionalidade. Segue ampliando o campo multiplicativo com os problemas de configuração retangular e de combinatória a partir do 3º ano e intensifica no Ciclo Interdisciplinar, usando inclusive números racionais na representação decimal em problemas que envolvem a ideia de proporcionalidade e de configuração retangular. Cabe lembrar que o significado de combinatória envolve apenas problemas com os Números Naturais.

O contexto e os problemas do campo multiplicativo

Neste texto, chamamos atenção algumas vezes sobre a relação existente entre os contextos e os significados do campo multiplicativo. Você já tinha percebido essa relação? Considera importante diversificar os contextos e os significados dos problemas?

Autores como Fosnot e Dolk (2001) destacam a importância da escolha do contexto nos problemas do campo multiplicativo. Eles afirmam que esses contextos envolvem três aspectos: permitem o uso de modelos; garantem o sentido para o processo de aprendizagem; e desafiam e provocam reflexões.

Segundo esses autores, uma situação-problema permite o uso de modelos quando o estudante pode usar imagens, desenhos ou representações, por exemplo, situações que envolvem frutas, bombons, objetos, modelos retangulares, etc. Eles destacam que a utilização do mesmo modelo em diferentes problemas possibilita a generalização por parte dos estudantes.

Os autores consideram que uma situação-problema deve fazer sentido para quem a resolve. Eles atribuem a expressão "fazer sentido" a uma situação imaginária ou não, em que os estudantes consigam compreender e analisar a razoabilidade dos resultados e das ações realizadas para a construção de estruturas e relações, como calcular a quantidade de figurinhas de uma criança que tem o dobro de figurinhas de outra.

Por último, e não menos importante, um problema deve ser desafiador e também permitir avanços e outras questões que podem ser feitas pelo professor, por exemplo: Por que isso aconteceu? E se acontecesse de outra maneira? Os autores afirmam que a possibilidade de novas questões caracteriza os bons contextos, pois permitem a explicação do que está acontecendo e ainda dão origem a outras que podem ser interessantes, tanto do ponto de vista do estudante como do ponto de vista da Matemática.

Os estudos, citados acima, mostram a importância de o professor selecionar (ou elaborar) problemas com bons e diversificados contextos, pois contribuem para a construção do raciocínio multiplicativo. Os autores destacam que os contextos devem apenas ser interessantes aos estudantes, mas também incluir possibilidades do uso de diferentes modelos a partir de estratégias de contagem de um a um, contagens por grupos, uso intuitivo das propriedades da multiplicação (comutativa, associativa, distributiva) e do cálculo formal.

Os modelos de agrupamento (agregado à ideia de proporcionalidade) e o de configuração retangular, próprios da multiplicação, devem ser explorados em diversos contextos, tanto no Ciclo de Alfabetização como no Ciclo Interdisciplinar, usando, neste último ciclo, inclusive, os números racionais na sua representação decimal.

Treffers e Buys (2001) afirmam que quando a ideia de multiplicar está associada à adição de parcelas iguais (significado de proporcionalidade), a tendência das crianças é de adicionar várias vezes o agrupamento que se repete e que esse tipo de raciocínio acaba por não validar a propriedade comutativa.

Treffers e Buys (2001) afirmam que a propriedade comutativa é sempre presente nos problemas de configuração retangular. Destacam que os contextos que envolvem esta ideia fazem emergir a validade da propriedade comutativa, mesmo que intuitivamente.

> Você sabia que nem sempre a criança percebe intuitivamente a existência da propriedade comutativa quando analisa o contexto de um problema envolvendo o significado de proporcionalidade? Os contextos que envolvem o significado de proporcionalidade não possibilitam a validação da propriedade comutativa, pois são muito diferentes, por exemplo, tomar 5 gotas de remédio durante 3 dias (5 + 5 + 5 ou 3 x 5) e tomar 3 gotas de remédio durante 5 dias (3 + 3 + 3 + 3 + 3 ou 5 x 3), embora os resultados dessas duas multiplicações sejam iguais a 15.

Procedimentos de Cálculo

Os pesquisadores Treffers e Buys (2001) e Fosnot e Dolk (2001) discutem os procedimentos de resolução dos problemas do campo multiplicativo. Eles afirmam que as crianças dão sentido aos problemas que envolvem os significados da multiplicação a partir de suas vivências no dia a dia, apresentam formas de multiplicar, assim como algumas relações entre elas de acordo com suas experiências, o que permite afirmar que a ideia que se tem da multiplicação determina a forma como se multiplica, ou seja, os procedimentos de cálculos.

Treffers e Buys (2001) apresentam três níveis de aprendizagem na realização de cálculos para a multiplicação: cálculo por contagem, cálculo estruturado e cálculo formal. A seguir, o texto apresenta a resolução de um mesmo problema de acordo com cada nível descrito pelos pesquisadores:

Em uma caixa cabem 4 lápis. Quantos lápis cabem em 8 caixas como essa?

O **cálculo por contagem** corresponde ao primeiro nível para resolução da operação de multiplicação. É baseado na ação de adicionar parcelas iguais para multiplicar. Neste caso, a operação de multiplicação não é explícita, os estudantes utilizam apenas adições repetidas, usando o procedimento de contagem.

0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000

No **cálculo estruturado** a ideia é de agrupamento, ou seja, a mesma quantidade se repete algumas vezes, os estudantes associam essa repetição de agrupamentos à multiplicação.

4	4
+4	8
+4	12
+4	16
+4	20
+4	24
+4	28
+4	32

Algumas vezes, usam modelos de apoio, representações, esquemas, diagramas, etc. Por exemplo, no referido problema, em que 4 lápis são colocados em cada caixa e pergunta-se quantos lápis serão colocados em 8 caixas iguais, muitas vezes os estudantes desenham grupo de 4 bolinhas (representando os lápis) e repetem esse grupo 8 vezes e indicam 8 x 4, contando de 4 em 4 apoiadas no desenho dos grupos até chegar no 32.

OOOO
OOOO
OOOO
OOOO
OOOO
OOOO
OOOO
OOOO
8 x 4 = 32

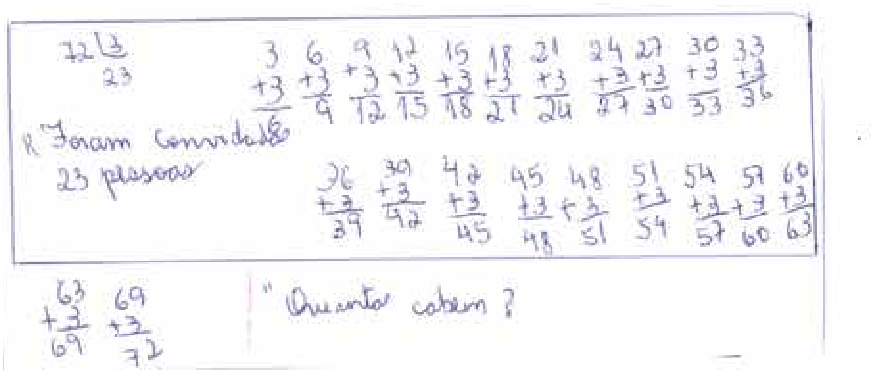
Os estudantes se utilizam do **cálculo formal** quando não necessitam de modelos de apoio ao cálculo. Embora não utilizem o algoritmo, apresentam as sentenças matemáticas e as resolvem recorrendo a diferentes relações entre a multiplicação e a produtos já conhecidos. Por exemplo, na mesma situação anterior, os estudantes indicam 8 x 4 e fazem 4 x 4 + 4 x 4, pois já conhecem esses produtos. Como é possível perceber, o cálculo formal está amparado no cálculo mental e no trabalho desenvolvido pelo professor de relacionar produtos conhecidos e utilizá-los na busca de outros produtos.

A transição entre esses níveis não é linear, precisa de apoio em situações-problema com contextos variados em que os estudantes possam se utilizar de modelos para resolvê-los. Eles concluem que o uso de diferentes situações que envolvem o mesmo modelo possibilita a passagem ao nível formal no qual o estudante não precisa mais se apoiar nos modelos.

Analise como estudantes do 5° ano do Ensino Fundamental resolvem os problemas do campo multiplicativo. Realize a análise a partir dos seguintes aspectos:

- Categorize o problema de acordo com as ideias do campo multiplicativo;
- Descreva as estratégias de resolução apresentadas pelos estudantes;
- Avalie se as estratégias foram válidas para chegar à resolução do problema.

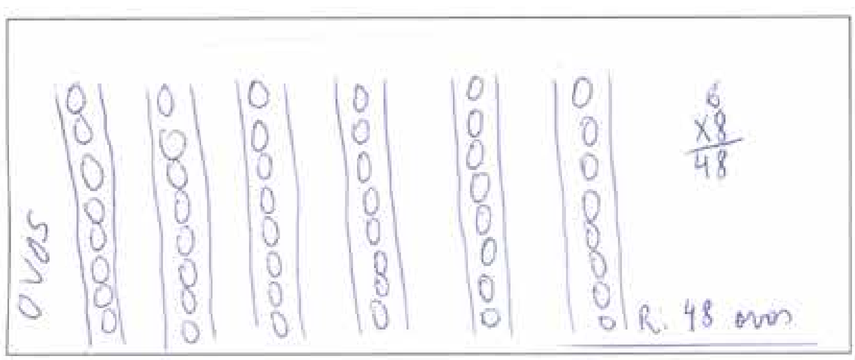
1. Para uma festa foram levadas 72 garrafas de refrigerante. Considerando que cada convidado levou 3 garrafas. Quantas pessoas foram convidadas?



Fonte: ZARAN, 2013, p. 106.

Figura 11 - Estratégia de resolução de problema 1

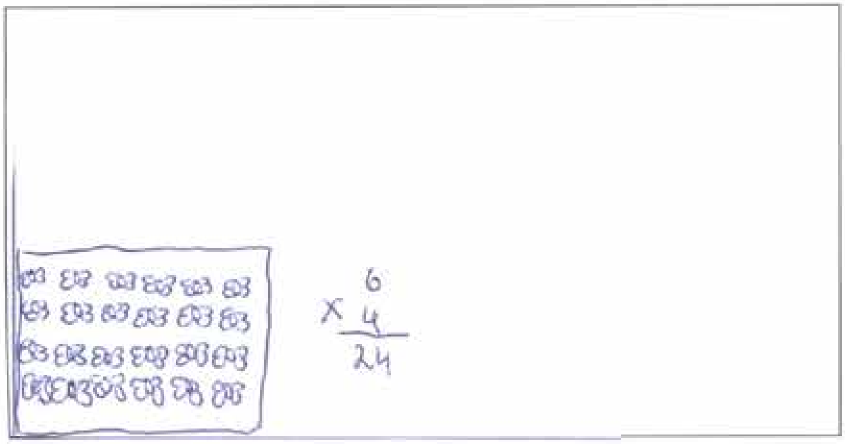
2. Uma caixa de ovos tem formato retangular. Os ovos estão organizados em fileiras. Quantos ovos há nessa caixa?



Fonte: ZARAN, 2013, p. 98.

Figura 12 - Estratégia de resolução de problema 2

3. Em uma fábrica de chocolates, os bombons são organizados em diferentes tipos de caixas retangulares. Cada caixa é organizada em fileiras e colunas. Todas as fileiras têm a mesma quantidade de bombons, e as colunas também. Organize esses bombons em diferentes tipos de caixa.



Fonte: ZARAN, 2013, p. 106.

Figura 13 - Estratégia de resolução de problema 3

4. João vai passar alguns dias na praia e levou 6 camisetas e 3 bermudas. Quais são as diferentes combinações que ele poderá fazer?

Fonte: ZARAN, 2013, p. 98.

Figura 14 - Estratégia de resolução de problema 4

As tabuadas

Não só na escola, mas socialmente, é muito comum a ansiedade de se trabalhar com as tabuadas e com o algoritmo da multiplicação. Esse trabalho deve ser concomitante a essas etapas de cálculo.

Certamente você se lembra de ter aprendido as tabuadas como cálculos em que é preciso primeiro decorar os resultados para depois aprender a multiplicar e resolver problemas. Correto?

O que discutimos neste texto desmistifica tal afirmação: as situações-problema envolvendo diferentes contextos e significados da multiplicação são anteriores às tabuadas. A ideia proposta é que a resolução de problemas necessita de contextos adequados e diversificados, envolvendo o mesmo significado da multiplicação ou os seus diferentes significados. Essa abordagem permite a compreensão da ideia da multiplicação, o uso intuitivo de propriedades e relações multiplicativas. Nesse percurso, os estudantes vão naturalmente construindo os produtos que constituem as chamadas tabuadas.

> A preocupação excessiva com a memorização das tabuadas, antes da resolução de problemas, ainda é presente nas salas de aula. É comum a afirmação de professores de que o estudante não resolve um problema que envolve multiplicação porque não sabe a tabuada.
>
> Será que essa afirmação é verdade? Como você trabalha a tabuada em suas aulas? Após essas reflexões, continue a leitura do texto.

O que deve ficar claro é que a tabuada não é um pré-requisito para a multiplicação, como se achava há algum tempo atrás, mas sim que a sua memorização é importante para uso em outros produtos e deve se desenvolver com compreensão.

Treffers e Buys (2001) identificam três fases para aprendizagem das tabuadas: a construção do conceito; o cálculo inteligente e flexível; a memorização completa das tabuadas mais importantes. Eles afirmam que cada uma delas acompanha os níveis de aprendizagem já referidos neste texto, ou seja, iniciam com cálculos por contagem e progridem até o cálculo formal.

Por muito tempo, a escola ensinou a tabuada a partir de uma estrutura equivocada, gerando conflitos no processo de aprendizagem. Observe as duas estruturas para a tabuada do 2:

Estrutura da tabuada da maneira como aprendemos:	Estrutura correta da tabuada:
2 x 1 = 2 2 x 2 = 4 2 x 3 = 6 2 x 4 = 8 2 x 5 = 10 2 x 6 = 12 2 x 7 = 14 2 x 8 = 16 2 x 9 = 18 2 x 10 = 20	1 x 2 = 2 2 x 2 = 4 3 x 2 = 6 4 x 2 = 8 5 x 2 = 10 6 x 2 = 12 7 x 2 = 14 8 x 2 = 16 9 x 2 = 18 10 x 2 = 20
Nessa estrutura qual fator se repete? O 2 ou o 1? Considerando que é a tabuada do 2, qual fator deve repetir? Quais são as consequências para aprendizagem ao ensinar a tabuada a partir desta estrutura?	Na tabuada do 2, o fator que se repete é o 2, então temos: 1 x 2 = 2 (um agrupamento de 2) 2 x 2 = 4 (dois agrupamentos de 2) 3 x 2=6 (três agrupamentos de 2) ...

Você se lembra que as tabuadas eram trabalhadas na sala de aula pela ordem da sequência numérica, ou seja, primeiro a do 2, depois a do 3, depois a do 4, a do 5, a do 6, etc., sem a preocupação da exploração de regularidades e das propriedades da multiplicação que podem ser usadas na sua construção? Você faz algum tipo de proposta diferente para o trabalho com as tabuadas? Registre suas reflexões e continue a leitura do texto.

A regularidade numérica na construção das tabuadas

O que propomos neste texto é a exploração das regularidades das tabuadas e das relações numéricas existentes. Por exemplo, partir da resolução de problemas que envolvem multiplicações por 2, por 5 ou por 10. O trabalho com essas tabuadas precisa ser feito de forma consistente, pois é a base para a construção de outras. A partir das tabuadas do 2 e do 5, é possível construir a tabulada do 10, multiplicando os resultados da tabuada do 2 por 5.

Uma estratégia possível de se ensinar a tabuada é convidar os estudantes a observarem as regularidades presentes nos resultados. Analise a tabuada do 6:

1 x 6 = 6
2 x 6 = 12
3 x 6 = 18
4 x 6 = 24
5 x 6 = 30
6 x 6 = 36
7 x 6 = 42
8 x 6 = 48
9 x 6 = 54
10 x 6 = 60

Quais regularidades podemos observar nos resultados da tabuada do 6? Quais algarismos se repetem ao final dos resultados? Se 2 x 6 = 12, quanto é 12 x 6? Com qual algarismo termina este resultado?

Você pode explorar com os estudantes os resultados de outras tabuadas. Observar essas regularidades auxilia a ampliar a compreensão da tabuada e também a encontrar resultados diversos sem a necessidade de estruturá-la a partir do 1, como muitos estudantes fazem ao resolver um problema ou operação.

A tabuada do 2 também serve de base para as tabuadas do 4, do 6 e do 8. A partir dos produtos já memorizados da tabuada do 2 e utilizando relações numéricas como, 4 é o dobro de 2, ou 8 é o dobro de 4 ou o quádruplo de 2, ou ainda 6 é o triplo de 2, é possível construir as tabuadas do 4, do 6 e do 8.

A tabuada do 2 é base para a tabuada do 4. Como 6 x 2 = 12, então 6 x 4 que é a mesma coisa que (6 x 2) x 2 ou 12 x 2 = 24. Portanto 6 x 4 = 24.

A tabuada do 6 apoia-se nas do 2 e do 3. Como o produto 4 x 2 = 8, então 4 x 6 é a mesma coisa que 4 x (2 x 3), ou (4 x 2) x 3 ou 8 x 3 = 24. O produto 4 x 3 =12 também é base para 4 x 6, ou seja, 4 x (3 x 2), ou (4 x 3) x 2, ou 12 x 2 = 24.

A análise de regularidades numéricas desse tipo permite a construção das tabuadas do 8 e do 9 também.

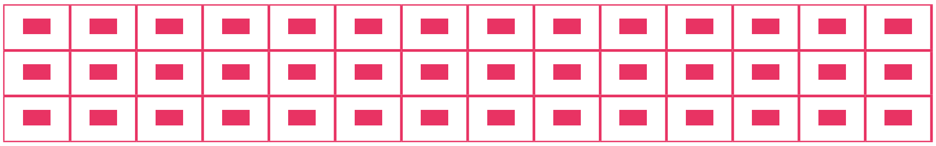
Algoritmos da Multiplicação e da Divisão

A partir das estratégias usadas pelos estudantes na resolução de um problema multiplicativo, é possível construir com compreensão o algoritmo da multiplicação.

Vejamos o problema a seguir:

Na caixa há 3 fileiras com 14 bombons em cada linha. Quantos são os bombons dessa caixa?

Um estudante do 3° ano fez a seguinte resolução, obtendo 42:



Em seguida, uma possibilidade de proposta de intervenção do professor apresentando o algoritmo a partir da resolução do estudante:

$$\begin{array}{rcr} 10 & + & 4 \\ & \times & 3 \\ \hline 30 & + & 12 \\ & 42 & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cc} {\scriptstyle 1} & \\ 1 & 4 \\ \times & 3 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

Vejamos agora um problema que pode ser resolvido por uma divisão:

Uma doceira fez 375 brigadeiros e precisava distribuí-los igualmente em 3 caixas. Quantos brigadeiros colocaram em cada caixa?

A resolução a seguir é de um estudante do 4° ano:

	100		20		5	125
375	100	75	20	15	5	125
	100		20		5	125

O estudante distribuiu 300 brigadeiros em 3 caixas iguais, ficando 100 em cada caixa e sobrando 75. Depois distribuiu mais 20 brigadeiros em cada caixa e sobraram 15. Por último, distribuiu mais 5 brigadeiros em cada caixa e não sobrou nenhum dos 375 que tinha. Contou quantos brigadeiros foram colocados em cada caixa: 100 + 20 + 5, ou seja, 125.

A partir dessa resolução, é possível que o professor faça uma intervenção e apresente o algoritmo denominado método americano.

	3	7	5		3	
–	3	0	0	1	0	0
		7	5	+	2	0
	–	6	0			5
		1	5	1	2	5
	–	1	5			
			0			

Após a compreensão do processo americano, é possível o professor fazer novas intervenções, apresentando o processo longo e, por último, o processo curto.

Processo longo

	3	7	5		3	
–	3	0	0	1	2	5
		7	5	C	D	U
	–	6	0			
		1	5			
	–	1	5			
			0			

Processo curto

3	7	5		3	
0	7		1	2	5
	1	5			
		0			

O texto apresentado indica alguns aspectos importantes a respeito do ensino de problemas do campo multiplicativo. Eles podem ser ampliados com leituras de outros textos que discorrem sobre o tema, como o indicado a seguir.

Após a leitura do texto, analise os objetivos de aprendizagem no ciclo em que você atua e verifique se os significados dos problemas do campo multiplicativo foram contemplados e como é feita a ampliação de um ano para outro. Analise também os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que contemplam os cálculos de multiplicação e divisão e observe se e como contemplam os procedimentos de cálculo usados na escola.

Leia o artigo:
MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa Nesta Área. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf

Discussões sobre o ensino e a aprendizagem dos Números Racionais

Introdução

Os Números Racionais, embora se constituam como um objeto de conhecimento muito importante, provocam grandes conflitos no processo de aprendizagem dos estudantes, sejam eles dos Ciclos Interdisciplinar ou Autoral.

Um dos motivos dessas dificuldades talvez possa ocorrer porque os Números Naturais são representados por um único símbolo e um único número racional pode ser representado por vários símbolos. Esse conjunto tem duas representações distintas que são usadas de acordo com a situação mais apropriada: a fracionária e a decimal. Cada uma tem uma funcionalidade diferente. A representação fracionária, por exemplo, ajuda a entender melhor razões, escalas e porcentagens. A representação decimal, muito usada nos dias de hoje, está presente na mídia, nos negócios e na vida profissional.

Outra dificuldade no uso desses números é em relação ao tipo de grandeza (discreta ou contínua) que surge nas atividades que envolvem os Números Racionais. Esses aspectos serão discutidos neste texto.

Provavelmente você deve perceber algumas dificuldades que seus estudantes enfrentam ao estudarem os Números Racionais.

Discuta com seus colegas e liste algumas dessas dificuldades que aparecem com frequência ao ensinar os Números Racionais.

Depois continue a leitura.

Professor(a), você sabe o que é grandeza discreta e contínua? Já pensou no ensino dos Números Racionais e em que tipo de grandeza você se apoia com mais frequência para ensiná-los?

Pense nessas questões e continue a leitura do texto.

Grandezas: Discretas e Contínuas

Conforme descrito no texto “O Ensino e a Aprendizagem das Grandezas e Medidas”, grandeza é tudo aquilo que pode ser contado, mensurado. Existem dois tipos de grandezas: as discretas e as contínuas. Essas grandezas envolvem duas noções elementares da Matemática, ou seja, contar e medir. As grandezas discretas são consideradas contáveis, pois podem ser facilmente quantificadas. Já as grandezas contínuas, são passíveis de medida, pois não permitem a contagem direta/imediata. Enquanto a primeira resulta em quantidade de objetos (contagem); a segunda quantifica suas qualidades (massa, temperatura, comprimento, capacidade, valor, volume e tempo) por meio da medida.

O mais comum no processo de ensino dos Números Racionais é associá-los às grandezas contínuas. Mas é importante destacar que a abordagem desses números também requer a exploração das grandezas discretas.

Esse é um dos obstáculos didáticos, ou seja, um obstáculo que se origina da didática do professor. No geral, o trabalho com os Números Racionais é feito apenas com as representações fracionárias e com grandezas contínuas, o que impossibilita a criança de raciocinar com grandezas discretas e de compreender que um número racional tem mais de uma representação.

A introdução dos Números Racionais

O ensino dos Números Racionais tem sido introduzido nos livros didáticos por meio de ilustrações, nas quais uma grandeza contínua é dividida em ***b*** partes iguais e são coloridas ***a*** dessas partes, representando assim a fração $\frac{a}{b}$.

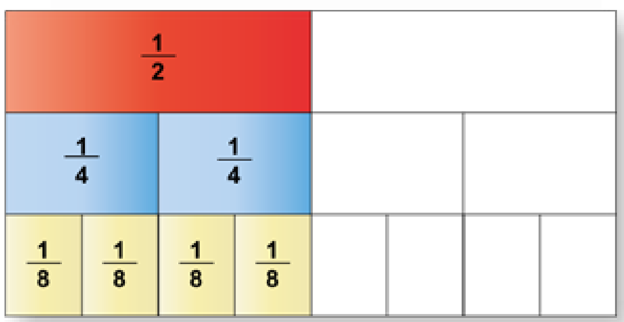
Você já ouviu de estudantes a dúvida: “- Como posso pegar cinco partes, se o inteiro só tem 2 partes”? Como ajudar os estudantes nesse caso?

Você sabe o que são frações equivalentes? Trabalha com as operações usando o conceito de equivalência?

Percebe-se, inicialmente, que são explorados casos em que $a<b$ (a, b IN, $b \neq 0$), enfatizando-se bastante que o inteiro foi dividido em b partes iguais, e delas foram retiradas ***a*** partes. É por isso que os estudantes apresentam dificuldades quando lhes é solicitado que representem com um desenho a “fração” $\frac{a}{b}$, em que $a > b$, como no caso da “fração” $\frac{5}{2}$.

No que se refere às operações, os livros didáticos as apresentam usando “frações”, com base em regras, sem referências a um conceito fundamental para compreensão das operações que é a equivalência de frações.

A palavra equivalente significa “de mesmo valor”. Dizemos que duas ou mais “frações” são equivalentes quando representam a mesma quantidade do inteiro, por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, ou seja, o sinal de igual (=) traz o sentido de equivalência que será explicitado neste texto. Todas essas “frações” representam a metade de um inteiro.



Mas, afinal, qual seria a justificativa de o professor ensinar o conteúdo de Números Racionais utilizando apenas “regras”?

Ainda neste texto, vamos aprofundar o conceito de equivalência.

Uma das repostas possíveis seria que o professor aprendeu por esse método e irá reproduzi-lo com seus estudantes. Outra possível reposta é que se trata de um conteúdo que deverá ser contemplado no 4º ou 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental para atender a demanda das avaliações externas e, se não for ensinada por meio de regras, os estudantes não aprendem.

Consideramos que não é aconselhável iniciar o ensino dos Números Racionais a fim de se obter apenas resultados decorados, sem o menor significado para o estudante. Por esse motivo, o Currículo da Cidade propõe o ensino dos Números Racionais no Ciclo Interdisciplinar a partir do 4º ano. Mas como esse objeto do conhecimento é abordado no documento?

O principal objetivo do ensino dos Números Racionais no Ciclo Interdisciplinar é levar os estudantes a perceberem que os Números Naturais, já conhecidos desde o Ciclo de Alfabetização, não são suficientes para resolver determinados problemas do nosso dia a dia.

No Currículo da Cidade, o desenvolvimento dos Números Racionais no Ciclo Interdisciplinar contempla seus significados, a leitura, a escrita, a comparação e a ordenação de representações fracionárias e decimais de uso frequente. Neste ciclo não há necessidade de sistematização de algoritmos das operações com racionais. As operações estão contempladas no Ciclo Autoral, e este texto apresenta uma discussão para subsidiar a prática dos professores.

Significados e usos dos Números Racionais

Kieren (1976) foi o primeiro pesquisador a chamar a atenção da comunidade científica para o fato de que os Números Racionais podem ser compreendidos por diferentes interpretações. Posteriormente, Kieren (1980), citado por Ohlsson (1988), identifica cinco ideias básicas no processo de compreensão dos Números Racionais: parte-todo, quociente ou divisão indicada, medida, razão e operador.

Neste texto, vamos discutir alguns desses significados.

Parte-todo

Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983, p. 93), a interpretação de um Número Racional como parte-todo se relaciona com a divisão de uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos em partes de “tamanhos” ou “proporções” iguais. Ou seja, esta situação (parte/todo) se apresenta quando um todo (contínuo ou discreto) se divide em partes iguais. Nesse caso, o Número Racional indica a relação que existe entre certo número de partes e o número total de partes em que o todo (unidade) foi dividido igualmente, como no exemplo: usei dois quintos de um tablete de chocolate para fazer um doce, ou seja $\frac{2}{5}$.

Quociente

Essa situação se apresenta quando um ou alguns objetos precisam ser divididos igualmente num certo número de grupos. É a ideia de partilha, de fazer agrupamentos, de divisão indicada. Isto quer dizer que, conhecido o número de grupos a serem formados, o quociente representa o "tamanho" de cada grupo. O Número Racional, nesse caso, corresponde ao resultado da divisão de 1 por 5, ou seja, cada criança recebe $\frac{1}{5}$.

Nesta interpretação, a "fração" $\frac{a}{b}$ representa uma divisão entre dois números inteiros, ou seja, o número $\frac{a}{b}$ representa uma relação de divisão entre duas quantidades ***a*** e ***b***, com ***b*** *diferente* de ***0***. É usado como um modo de escrever ***a*** ÷ ***b*** (divisão indicada), como no exemplo: uma pizza a ser repartida igualmente entre 5 crianças. Cada criança vai consumir $\frac{1}{5}$.

Medida

Para Caraça (1951) é necessário que se estabeleça um termo de comparação único para todas as Grandezas de mesma espécie, ou seja, uma unidade de medida como centímetros para medir comprimentos; gramas para medir massa; segundos para medir tempo etc. A questão também exige uma resposta para a pergunta – quantas vezes cabe? – o que se faz dando um número que represente o resultado da comparação. Esse número chama-se medida da grandeza em relação a essa unidade.

Esta situação poderia ser exemplificada tomando-se dois segmentos, um deles como unidade de medida, assim é possível saber quanto mede o outro, ou seja, quantas vezes o segmento menor cabe dentro do maior, como no exemplo: Mariana comprou 8 metros de fita lilás e vai dividi-los igualmente em partes de 0,5m. Quantos pedaços ela obterá?

Há casos em que não há um número inteiro capaz de identificar esta medida; recaímos, então, na necessidade de expressar esta relação por intermédio do Número Racional.

Razão

Algumas vezes o Número Racional é utilizado para estabelecer uma relação entre duas quantidades a e b que carregam a noção de magnitude relativa (comparação de situações). Neste caso estamos diante de uma situação que envolve o conceito de razão e não existe, necessariamente, uma unidade (um todo).

Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983), a razão, por ser uma relação que carrega a noção de magnitude relativa, é considerada, mais corretamente, como um índice comparativo do que um número, como no exemplo: Em minha gaveta existem dois pares de meias brancas e três pares de meias pretas. Retiro da gaveta, sem olhar, um par de meia. Qual é a probabilidade de que seja um par de meias brancas? Como podemos observar temos 5 pares de meias no total e 2 destes são meias brancas. Logo temos a razão é $\frac{2}{5}$.

Operador

Define uma estrutura multiplicativa em que o operador $\frac{a}{b}$ faz duas operações: uma de multiplicação por ***a*** e outra de divisão por ***b***. Neste caso, pressupõe uma interpretação algébrica dos Números Racionais, podendo ser pensado como uma função que transforma um conjunto em outro. O Número Racional $\frac{a}{b}$ transforma um conjunto com n elementos em um outro com ***n***.a elementos e, então, este conjunto é reduzido a $n.(\frac{a}{b})$ (BEHR; LESH; POST; SILVER, 1983).

O exemplo a seguir apresenta o número racional com significado de operador: que número devemos multiplicar por $\frac{5}{2}$ para obter 1? (Esse número é $\frac{5}{2}$)

As pesquisas apontam que se não há clareza por parte dos professores sobre os diferentes significados dos Números Racionais, as situações de ensino são mais limitadas, restringindo-se ao uso de atividades relacionadas ao significado parte-todo.

Iniciando o trabalho com a representação decimal

A representação decimal dos Números Racionais é usada em inúmeras situações do cotidiano: no sistema monetário; em situações esportivas; em situações de avaliação com unidades decimais; em situações para indicar medidas.

Com o advento das calculadoras e dos computadores, há indicações curriculares, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), de focar o trabalho com os Números Racionais a partir das representações decimais, pois estas são mais próximas das vivências dos estudantes. Hoje o contato com essas representações é mais frequente do que as representações na forma fracionária. Na vida cotidiana, o uso de frações limita-se a metades, terços, quartos e mais pela via da linguagem oral do que das representações.

Para ensinar as representações decimais, o trabalho com medida e com instrumentos de medida (régua, balança, fita métrica, termômetro) é fundamental. Outras situações podem envolver a utilização de jornais, revistas, folhetos de supermercados, receitas culinárias, rótulos de produtos, bulas de remédio, etc.

É importante a realização da leitura dos Números Racionais quando estes estão representados na forma decimal, como um dos fatores que colaboram na compreensão do conceito desse número.

Os obstáculos epistemológicos e didáticos encontrados no ensino dos Números Racionais

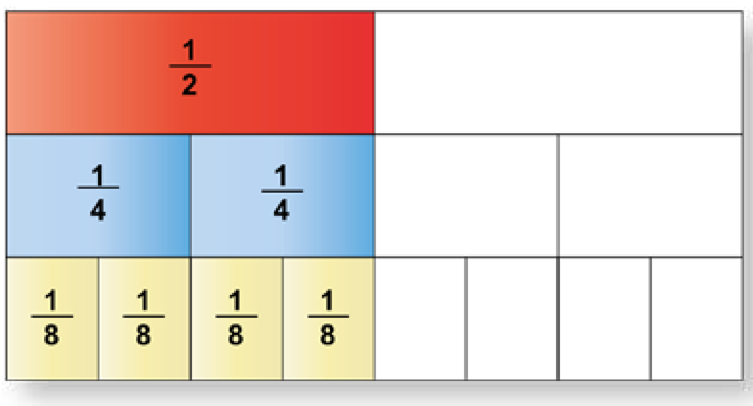
> O que você acha do trabalho que vem sendo realizado com Números Racionais? Está de acordo com as orientações curriculares ou você acha que precisa de mudanças no planejamento para a consecução dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento propostos no Currículo da Cidade?

Algumas das causas pelas quais aparecem as dificuldades na aprendizagem dos Números Racionais podem ser devido à natureza desse conjunto numérico (obstáculo epistemológico) ou das decisões que os professores tomam em sala de aula, das propostas selecionadas ou elaboradas para as crianças (obstáculos didáticos).

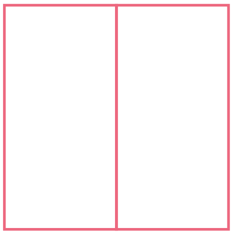
As dificuldades associadas aos obstáculos epistemológicos referem-se à complexidade de um novo conhecimento que provoca rupturas entre um campo numérico, o campo dos Números Naturais, e um "novo" campo numérico, o dos Números Racionais.

Introduzindo o cálculo com as representações fracionárias

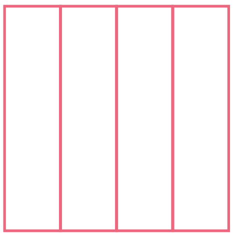
Um conceito importante para o cálculo com as representações fracionárias é o de equivalência. Para o desenvolvimento desse conceito, o trabalho com folhas de papel do mesmo tamanho é muito interessante. Se o estudante dividir uma folha vermelha em duas partes iguais, uma folha azul em quatro partes iguais e, posteriormente, uma folha amarela em 8 partes iguais e comparar essas partes perceberá que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

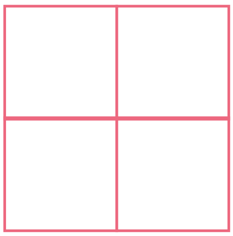


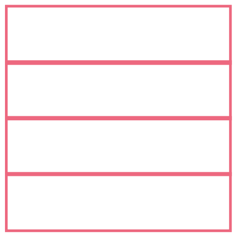
Na divisão de uma folha em partes iguais, há modos diferentes de se obter meios, ou metades de uma folha, conforme o jeito que se corta:



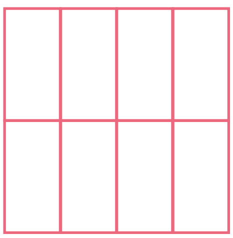
Quando temos metades, dividindo-se cada uma ao meio, a folha fica dividida em 4 partes iguais – 4 meios. Logo, há vários modos de se dividir uma folha em 4 partes iguais. Em qualquer um desses casos, obtêm-se quartos da folha. Um quarto da primeira folha vale o mesmo que um quarto da segunda ou da terceira, embora pareçam visualmente diferentes.

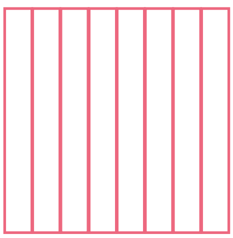






Dividindo-se cada quarto ao meio, a folha fica dividida em 8 partes iguais - 8 oitavos. Da mesma forma, há vários modos de cortar oitavos da folha. Todos eles representam partes iguais de uma mesma folha de papel, embora, visualmente, se pareçam diferentes.





Importante destacar com o estudante que a quantidade do papel utilizado é o mesmo em qualquer das situações apresentadas. Se for um chocolate, tanto faz você comer um pedaço da primeira barra, ou da segunda, ou da terceira, desde que elas sejam iguais. O importante neste momento é explorar junto com os estudantes as equivalências de frações, fazendo com que essas comparações obtidas os auxiliem a chegar a essas conclusões.

Retomando as divisões com a folha de papel temos:

- 1 folha, 2 partes iguais = $\frac{1}{2}$
- Meia folha, 2 partes iguais = $\frac{1}{4}$
- 1 quarto de folha, 2 partes iguais = $\frac{1}{8}$

> A exploração das "frações" meio--quarto-oitavo, centrada em divisões sucessivas, evidencia a propriedade de que "quanto mais dividimos certa coisa, menor fica".

Segundo Leen Streefland (1991), um pesquisador do Instituto de Freudenthal, os estudantes são capazes de compreender a ideia de representação fracionária e, consequentemente, a equivalência de "frações", em situações em que lhes pedimos que façam uma distribuição equitativa. A partição equitativa permite que os estudantes desenvolvam o sentido de quociente (dividir as folhas de papel em duas, quatro e oito partes iguais), e que eles estabeleçam uma relação entre este significado e o significado parte-todo.

Essa exploração oral e manipulativa de materiais, como a divisão das folhas de papel, tem por finalidade ajudar os estudantes a perceberem que, em um mesmo inteiro, quanto maior o número de partes iguais nas quais ele é dividido, menor é cada parte. Ou seja, esse tipo de atividade propicia a compreensão da relação inversa entre o número de partes e seu "tamanho". Dessa maneira, o estudante passa a reconhecer prontamente que $\frac{1}{8}$ é menor do que $\frac{1}{4}$ porque o inteiro foi "dividido em mais partes".

> Como você aprendeu adicionar "frações" de denominadores diferentes? Será que você compreendia o processo ou apenas decorava: "divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima"? Você acha que é possível adicionar "frações" de denominadores diferentes de outra forma? Veja o texto a seguir.

Podemos neste momento introduzir as operações do campo aditivo e multiplicativo, usando o conhecimento sobre as "frações" meio, quarto e oitavo, e sem usar regras para operações, tais como, "para adicionar ou subtrair duas frações de mesmo denominador, conservamos o denominador e somamos os numeradores". Esse tipo de "regra" reduz a adição/ subtração de "frações" a uma manipulação de símbolos numéricos, o que esconde sua clara interpretação e dificulta a aprendizagem.

A fim de evitarmos o uso de "regras" num primeiro momento, sugerimos atividades usando folhas de papel do mesmo tamanho, cortadas em metades ou em quartas partes e propomos atividades numéricas para fazer usando os pedaços de papel, tais como:

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ (um meio da folha mais um meio folha)
- $\frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (dois meios da folha mais um meio da folha)
- $\frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$ (cinco quartos da folha menos um quarto da folha)

Após várias atividades desse tipo, é possível chegar com compreensão no algoritmo da adição ou subtração de Números Racionais na forma fracionária, quando os denominadores são iguais. Os estudantes do Ciclo Autoral já conhecem esse algoritmo, mas agora faz mais sentido, certo?

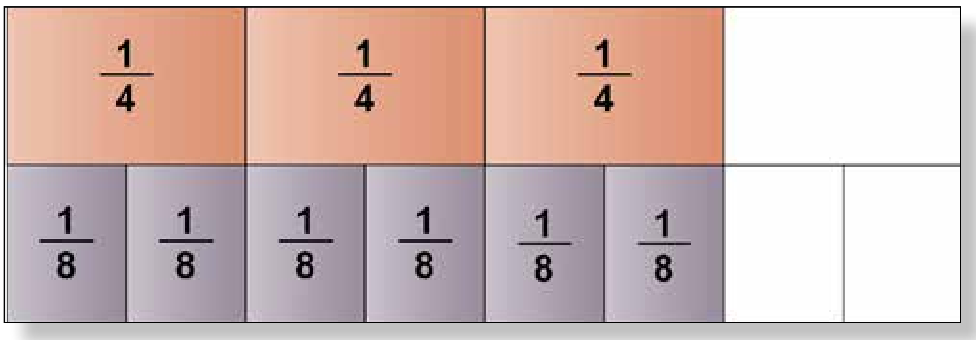
Para adicionar (ou subtrair) “frações” com denominadores iguais, conserva-se o denominador e adicionam-se (ou subtraem-se) os numeradores.

Adição e Subtração

Nesse caso, usaremos as “frações” equivalentes.

É importante discutir com os estudantes que só é possível adicionar (ou subtrair) partes do inteiro do mesmo “tamanho”. Isso se justifica porque o denominador denomina em quantas partes iguais o inteiro foi dividido. Logo, quando “frações” têm o mesmo denominador, significa que as partes do inteiro têm o mesmo “tamanho”. Mas e se os denominadores forem diferentes?

Dessa forma, é possível adicionar (ou subtrair), por exemplo, $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ usando o conceito de equivalência, ou seja, é preciso que cada parte do inteiro (a quarta e a oitava) tenha “o mesmo tamanho”. Logo é preciso “arrumar” uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ que tenha o denominador 8. Usando uma folha de papel e dividindo-a igualmente em 4 partes e usando 3 dessas partes e outra folha de papel dividida igualmente em 8 partes, é possível perceber que há necessidade de 6 pedaços de $\frac{1}{8}$ para “cobrir” os $\frac{3}{4}$ do papel.



Logo $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Após várias atividades desse tipo, é possível chegar com compreensão no algoritmo da adição (ou subtração) de Números Racionais na forma fracionária, quando os denominadores são diferentes. Os estudantes do Ciclo Autoral já conhecem, mas, dessa forma, fica mais compreensível. Veja só:

Para adicionar (ou subtrair) “frações” com denominadores diferentes, transformam-se as “frações” em suas equivalentes que tenham o mesmo denominador. Para obter o resultado, conserva-se o denominador comum e adicionam-se (ou subtraem-se) os numeradores.

Multiplicações e Divisões

E na multiplicação e divisão, por que será que os algoritmos são tão diferentes dos da adição e da subtração? Será que é possível trabalhar também com as equivalências e reduzi-las ao mesmo denominador na multiplicação e na divisão?

Vejamos na multiplicação:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{64}$$

Será que essa forma de operar e o resultado estão corretos?

Por mais surpreso que seus estudantes fiquem com esse processo, ele está correto. Apenas não se faz dessa maneira para que o resultado seja um Número Racional simplificado. O resultado $\frac{6}{64}$ é equivalente $\frac{3}{32}$, ou seja, basta simplificar o resultado dividindo numerador e denominador dessa "fração" por 2.

O resultado $\frac{3}{32}$ pode ser obtido também multiplicando numerador por numerador e denominador por denominador sem a preocupação da redução ao mesmo denominador, como é feito tradicionalmente.

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$$

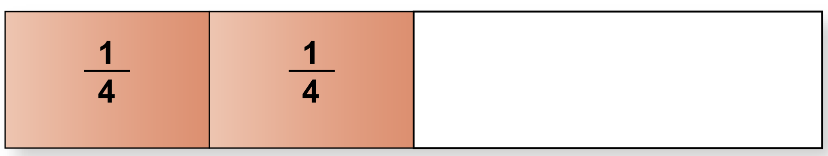
E com as divisões? Será que também é possível usar as "frações" equivalentes?

Para o trabalho com as divisões é necessário que se contextualize o seu significado, pois não há sentido para o estudante realizar esse algoritmo, como em $1 \div \frac{3}{4}$.

Assim como ocorria com a divisão de Números Naturais, também a divisão de Números Racionais está associada a situações de partilha e de medida. Na partilha, temos a divisão equitativa; na medida, temos a formação de grupos ou porções de tamanho predeterminado. O uso da divisão como partilha nem sempre será possível com "frações", porém a divisão como formação de grupos de tamanho fixado (medida) será sempre possível.

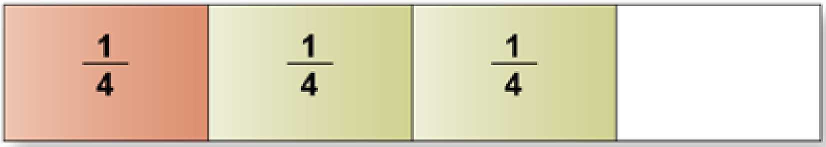
Na divisão como partilha, uma quantidade é dividida igualmente num certo número de partes. Ao final, vemos com quanto cada parte ficou. É interessante voltar ao trabalho com papel, pois facilita o entendimento do estudante:

- $\frac{1}{2}$ folha dividida em 2 partes



- $\frac{3}{4}$ do chocolate dividido em 3 partes

  $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$



Quando temos a divisão $2 : \frac{3}{4}$, fica difícil imaginar uma situação de partilha. Como vamos dividir 2 inteiros para meia pessoa ou meia parte?

Mas a divisão tem também outra interpretação, a de medida, ou seja, de formar pacotes, porções ou partes. Nesse caso, temos 2 unidades e procuramos formar porções de $\frac{1}{2}$ unidade, como:

Temos duas maçãs que serão separadas em pedaços de metades. É possível obter 4 pedaços da $\frac{1}{2}$ da maçã (divisão como medida). Em duas maçãs há 4 pedaços de $\frac{1}{2}$.

Seus estudantes resolvem uma divisão usando uma regra procedimental tradicionalmente incorporada na prática. Vamos lembrar essa regra:

Certamente, a regra mais usada para dividir duas “frações” é “multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda”. Durante as nossas pesquisas percebemos que o ensino desse processo quando efetuado simplesmente por regras memorizadas não apresenta significado algum para o estudante.

No entanto, quando se apresentam algumas atividades contextualizadas, os próprios estudantes começam a perceber que é possível usar uma regra, sempre que tiverem que resolver uma operação com as representações fracionárias do Número Racional.

O mesmo trabalho pode ser feito com as “famílias de frações” $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{12}$. Isso fará com que os estudantes percebam as relações existentes entre elas.

Introduzindo o cálculo com as representações decimais

Antes de serem chamados de decimais, esses números eram conhecidos como “números quebrados”, porque os algarismos à direita da vírgula indicam partes ou uma fração da unidade. A comparação entre Números Racionais na forma decimal não é tão simples. Vejamos:

Comparação de decimais

É interessante iniciar com situações contextualizadas e as medidas são possibilidades para o trabalho com as representações decimais, pois fazem parte do dia a dia dos estudantes. Usando medidas é fácil para os estudantes perceberem, por exemplo, qual refrigerante tem maior capacidade: o de 1,5l, de 2,5l, ou o de 2,75L ? Ou ainda qual a maior temperatura entre 35,5 °C e 37,2 °C.

As comparações entre as representações decimais permitem que os estudantes estabeleçam regularidades e avancem em alguns conceitos, por exemplo, se as partes inteiras forem diferentes, basta verificar qual número tem a maior parte inteira, como no exemplo: 19,3 > 16,789.

Se a parte inteira for igual, basta comparar as partes decimais: décimos, centésimos, milésimos, nessa ordem, como: 0,65 > 0,62; 3,2 > 3,199; 0,5 > 0,005.

Sugerimos que ao iniciar o trabalho com a representação decimal, os estudantes utilizem calculadora e observem resultados de divisões para proceder às comparações entre as representações decimais.

A leitura é uma importante aliada na compreensão da magnitude da representação decimal dos números racionais. Existem diferentes formas de efetuar a leitura, por exemplo: o número **5,42** pode ser lido como: cinco inteiros e quarenta e dois centésimos; quinhentos e quarenta e dois centésimos; cinco inteiros, quatro décimos e dois centésimos. Para desenvolver a habilidade de leitura desses números, é importante que o professor trabalhe o quadro de valor posicional também para as representações decimais.

Número	Parte inteira	Parte decimal	Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
			C	D	U	d	c	m
1,5	1	5			1	5		
33,64	33	64		3	3	6	4	
411,2	411	2	4	1	1	2		
7,132	7	132			7	1	3	2

Como no trabalho com os Números Naturais, o estudo do valor posicional dos algarismos é muito importante. Na representação decimal, com a separação da parte inteira e da parte decimal do número, podemos fazer o estudo do valor posicional de cada algarismo e propor diversas questões, tais como:

- No número 1,5 o que representa o algarismo 5?
- Quantos décimos possui o número 33,64?
- Quantos milésimos possui o número 411,2?

O quadro de valor posicional auxilia também nas operações realizadas com a representação decimal. Você já pensou sobre isso?

A proposta é aproximar o ensino dos Números Racionais aos conceitos que os estudantes já se apropriaram ao trabalhar com os Números Naturais.

Adição e subtração de representações decimais

Lembre-se de que é importante discutir com os estudantes que um Número Racional não se altera quando acrescentamos (ou suprimimos) um ou mais zeros à direita das ordens decimais: 6 = 6,0 = 6,00

Para fazer cálculos com as representações decimais, usamos o mesmo processo das operações com Números Naturais. No caso das representações decimais, na parte decimal, adicionamos (ou subtraímos) milésimos com milésimos, centésimos com centésimos, décimos com décimos e, finalmente, trabalhamos com a parte inteira, adicionando (ou subtraindo) unidades com unidades, etc. Veja algumas resoluções de estudantes de 6° ano. Explique como procederam.

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

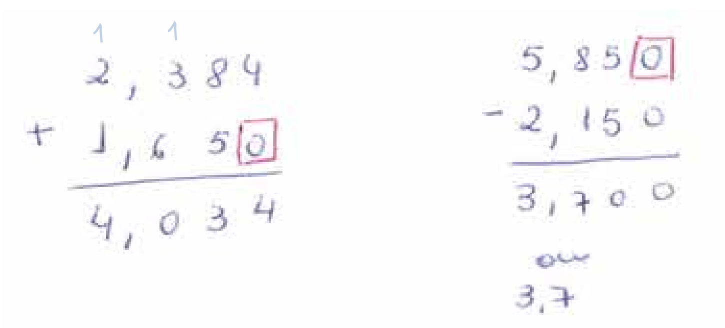


Figura 15 - Resolução de estudantes

Você lembra como foi ensinada a multiplicação e a divisão de Números Racionais na representação decimal no seu tempo de estudante? Você achava simples? E como isso pode ser feito?

Multiplicação e Divisão de representações decimais

Uma sugestão é iniciar o trabalho com multiplicação e divisão de representações decimais por 10, 100, 1.000, com o uso da calculadora, para que se possam compreender algumas regularidades observadas durante o cálculo e nos resultados.

Observando a calculadora, é possível perceber que, ao multiplicar por 10, a vírgula desloca-se “uma casa” para a direita; por 100, a vírgula desloca-se “duas casas” para a direita; por 1.000, a vírgula desloca-se “três casas” para a direita.

O mesmo processo ocorrerá com a divisão por 10, porém a vírgula desloca-se “uma casa” para a esquerda; por 100, a vírgula desloca-se “duas casas” para a esquerda; por 1.000, a vírgula desloca-se “três casas” para a esquerda.

Com o uso desses procedimentos, os estudantes compreendem melhor certas regras que eram ensinadas sem explicação, como essas que envolvem a “mudança de lugar” da vírgula, de acordo com multiplicação ou divisão por potências de 10.

É possível, sem uso de calculadora, explicitar aos estudantes o procedimento usado, por exemplo, na multiplicação de 10 x 6,3, usando a decomposição e recorrendo ao quadro de valor posicional: 10 x 6 = 60 unidades; 10 x 0,3 = 30 décimos. Como 1 unidade é constituída de 10 décimos, 30 décimos é equivalente a 3 unidades, portanto o resultado da multiplicação será 63.

Quando temos a seguinte operação 2,5 x 3, podemos utilizar o princípio aditivo de parcelas 2,5 + 2,5 + 2,5 = 7,5, porém, na prática, multiplicamos os números sem considerar a vírgula (25 x 3 = 75) e repetimos a mesma quantidade de casas decimais do número decimal. Por que será que fazemos isso?

Mas e se a multiplicação for por outros números diferentes das potências de 10? Como fazer?

A ideia de que, ao invés de usar 2,5, utilizarmos 25 significa que o 2,5 foi multiplicado por 10. Logo, o resultado de 25 x 3 = 75 também ficou multiplicado por 10. Para obter o resultado correto, deve-se dividir 75 por 10, obtendo-se 7,5.

O mesmo processo ocorre quando multiplicamos dois números representados na forma decimal como 2,5 x 3,2.

Basta multiplicar os números inteiros 25 x 32, obtendo-se 800. Mas 25 é resultado de 2,5 x 10 e 32 é resultado de 3,2 x 10. Logo, o resultado da multiplicação de dois números multiplicados por 10 é um número multiplicado por 10 x 10, ou seja, por 100. Dessa forma, o resultado da multiplicação deve ser dividido por 100, obtendo-se 8. Muito mais fácil do que fazer multiplicação de números com vírgula, você não acha?

O mesmo raciocínio pode ser usado quando se faz divisões de Números Racionais na forma decimal. Se tiver a divisão de 3,2 por 2, por exemplo, pode-se dividir 32 por 2 e obter 16, mas o resultado fica multiplicado por 10, lembra? Pois foi feito **inicialmente a multiplicação de 3,2 por 10**. Então, deve-se **dividir** o quociente por 10, obtendo 1,6.

Mas e se tiver que dividir 32 por 0,2? Que procedimento poderia ser usado? Pensando como nas situações anteriores, basta multiplicar o divisor 0,2 por 10, certo? Assim se dividiria 32 por 2 obtendo 16. Mas e agora? O que fazer com o resultado? Veja que se **multiplicou o divisor por 10**, o que significa que 32 será dividido por um número 10 vezes maior do que o pretendido, certo? Então é necessário **multiplicar o quociente também por 10**, para obter o resultado correto.

Em cada caso, o estudante deve raciocinar a partir das mudanças feitas e das consequências dessa mudança.

Se tiver, por exemplo, que dividir 3,2 por 0,16, como poderia ser feito? Vamos pensar primeiro no dividendo que é 3,2 e que para se tornar inteiro deve ser multiplicado por 10 (ao fazer isso, o quociente deve ser dividido por 10). Como o dividendo também é um número "quebrado", deve ser transformado em inteiro, multiplicando-se 0,16 por 100 (ao fazer isso, deve-se multiplicar o quociente por 100). Assim, para fazer 3,2 : 0,16, basta fazer 32 : 16 = 2. Após encontrar o quociente, deve-se multiplicá-lo por 100 e a seguir dividir por 10, ou seja, 2 x 100 = 200 e 200 : 10 = 20. No final, é possível usar calculadora para validar o processo dividindo 3,2 por 0,16 para obter 20.

Situações como essas se forem contextualizadas, darão mais sentido aos estudantes, por exemplo: Mariana comprou 3,2 metros de fita de cetim para dividir em pedaços de 0,16m para decorar caixas de presentes. Se usar um pedaço de fita em cada caixa, quantas caixas Mariana pode decorar com a fita que comprou? Atividades desta natureza podem ser utilizadas pelo(a) professor(a) lembrando que auxiliam a construção da Matriz de Saberes que estruturam a prática pedagógica e cognitiva dentro de contexto de formação do cidadão.

Agora verifique os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento propostos no Currículo da Cidade e verifique se estão adequados para o ano de escolaridade e se este texto ajuda o professor no trabalho com os Objetivos propostos.

Números Inteiros

Introdução

O ensino dos Números Inteiros tem sido objeto de muitas discussões e preocupações entre professores que ensinam Matemática, uma vez que, ao proporem atividades envolvendo as operações com esses números, os estudantes apresentam dificuldades, tanto para a sua compreensão quanto para a sua aceitação.

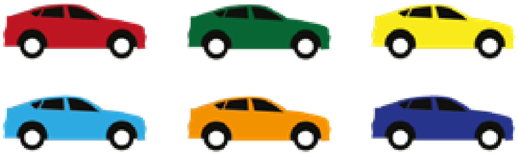
De acordo com a sua prática, quais dificuldades os estudantes apresentam na aprendizagem dos números positivos e negativos?

Reflita sobre essas dificuldades e continue a leitura do texto que ajudará a compreendê-las melhor.

A aceitação dos números inteiros não é simples se pensarmos que durante anos os estudantes se deparam com problemas envolvendo os Números Naturais em situações concretas, vivenciadas em seu cotidiano. Entretanto, ao resolverem problemas que envolvem os Números Inteiros, os estudantes vão buscando uma lógica que os ajudem na compreensão dos conceitos desse campo numérico. Algumas dúvidas que surgem estão relacionadas à(s):

- Ordem de grandeza dos números: uma das perguntas frequentes é como -5 pode ser maior que -10? É de difícil resposta. Ao associar o número -5 e o -10 a saldos devedores, por exemplo, não significa que seja fácil a aceitação de que é melhor dever 5 do que 10. Esse conceito, aparentemente fácil para nós professores, não é tão fácil assim para os estudantes, uma vez que este conceito está relacionado ao conhecimento de módulo ou valor absoluto de número[2];
- Representações de quantidades envolvendo os números inteiros: uma questão que surge em sala de aula é como representar uma situação de perda de 3 bolinhas, ou uma de ganho de 6 bolinhas, por exemplo. O +6 para representar o ganho de 6 bolinhas já faz parte do cotidiano dos estudantes que o reconhecem como 6, mas a representação da perda de 3 bolinhas por -3, não é considerada "quantidade" negativa. Qualquer estudante que está no 7° ano representa a quantidade + 6 com muita tranquilidade, por exemplo, seis carrinhos, seis balas...

2 Designa-se por valor absoluto (ou módulo) de um número x o valor absoluto de x e representa-se simbolicamente por | x | o número positivo do conjunto {-x,x} se x≠ 0. Se x = 0, o valor absoluto é zero. Outra possibilidade de definir módulo de um número ou valor absoluto de um número inteiro seria considerarmos uma reta real em que os números reais são representados de forma ordenada de – a para + a, ou seja, da esquerda para a direita, dizemos que o valor absoluto de um determinado número corresponde à distância desse número à origem desse referencial (ponto 0 da reta numérica). Nesse sentido, o valor absoluto de | +7 | = | -7 | = 7.



Mas representar a "quantidade" de -3 carrinhos? Ou de – (-4) balas? não é possível, pois "quantidades" negativas existem em contextos específicos, por exemplo, o saldo bancário quando devedor ou na situação de ganhos e perdas já exemplificada

- Operações de adição e subtração: Uma das perguntas que surgem por parte dos estudantes é como podemos adicionar um número ao número 5 e obter 2? Outra é como podemos fazer a subtração 4 - 6? Essas perguntas surgem porque durante muito tempo os estudantes construíram a ideia de que toda vez que adicionamos um número a outro, o seu resultado é sempre maior, e que em uma subtração, o minuendo é sempre maior que o subtraendo;
- Operação de multiplicação: A pergunta frequente que os estudantes fazem é como a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo? A experiência escolar que possuem com a multiplicação de Números Naturais tem resultado sempre positivo, por exemplo, 3 x 5 = 15. Dizer que a multiplicação de um número positivo por um número negativo será sempre negativo, não faz sentido para eles.

> Você já identificou essas dificuldades entre os estudantes? Quais são as mais comuns? Como o professor pode intervir em cada uma delas?
>
> O texto poderá auxiliar sobre essas e outras reflexões.

Alguns significados dos Números Inteiros

Essas e outras questões apresentam alguns dos conflitos enfrentados pelos estudantes ao estudarem os números inteiros. Conforme Cid (2003), esses conflitos estão relacionados a alguns dos significados dos números inteiros.

No modelo de neutralização, os objetos que se manejam se relacionam a quantidades que podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos. Quando as quantidades são iguais e os sentidos são opostos, se neutralizam entre si. Neste caso, os sinais que acompanham os números, denominados por Cid (2003) de predicativos, indicam o sentido e os sinais que os denominam de operativos representam as operações a serem realizadas. A seguir, apresentamos exemplos de modelos de neutralização e uma situação ilustrativa.

Neutralização

Pontos ganhos e perdidos, créditos e débitos, saldos positivos e negativos, lucros e prejuízos, entre outros.

Exemplo: João depositou R$150,00 e fez um débito de R$ 185,00.

No modelo de deslocamento, os Números Inteiros indicam o deslocamento, e os sinais predicativos indicam o sentido do deslocamento ou a situação da posição em relação à origem. Os sinais operativos podem significar composição de deslocamentos ou aplicação de um deslocamento em relação a uma posição para obter uma nova posição. A seguir apresentamos exemplos de modelos de deslocamento e uma situação ilustrativa.

Deslocamento

Temperaturas e termômetros, altitudes acima ou abaixo do nível do mar, elevadores, percursos, fatos ocorridos no tempo.

Exemplo: A temperatura de uma cidade pela manhã era de 10 graus e, à tarde, passou a 5 graus.

CID, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Disponível em <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25>. Acesso em agosto 2017

Conhecer um pouco do percurso histórico dos números inteiros permite a compreensão das dificuldades enfrentadas no ensino e também na aprendizagem desse conjunto numérico.

Um pouco de história para compreendermos os Números Inteiros

O conhecimento sobre o conjunto dos Números Naturais advém principalmente das situações de uso e, consequentemente, suas operações aparecem de forma natural, pois perpassam pela ação humana.

No caso dos Números Inteiros, o conhecimento sobre sua organização e estrutura se processou de forma lenta, enfrentando muita rejeição por parte dos matemáticos. Para compreender esses obstáculos na construção dos Números Inteiros, recorremos inicialmente a Bachelard (1996), que diz que os obstáculos de origem epistemológica, como é o caso dos números inteiros, vem do próprio conhecimento. Para esse autor, o conhecimento científico não pode ser pensado como um aprimoramento do conhecimento comum, isso ocorrerá pela ruptura dos conhecimentos fechados em si mesmo e que precisam ir além do senso comum. O sujeito ampliará seus conhecimentos se houver razões que permitam que ele substitua um saber fechado e estático por algo aberto e dinâmico, o que implica que o sujeito deverá enfrentar situações que lhes são apresentadas, pondo à prova seus conflitos internos, sua lentidão de pensamento, estabelecendo um conjunto de argumentos que contribua para a solução do problema. Já Brousseau (1983) diz que obstáculo é uma concepção e que ela produz respostas adaptadas em certo contexto, mas, fora desse contexto, as respostas que muitas vezes são produzidas são falsas. "Essa concepção resiste às contradições com as quais ela é confrontada, depois de tomada de sua inexatidão continua a manifestar-se de modo obstinado" (ROSSI, 2009, p.42). A partir dessas concepções de obstáculo, vamos conhecer o processo histórico do reconhecimento dos números inteiros dentro da Matemática.

Na China antiga já havia alguns conhecimentos sobre os Números Inteiros, "os chineses representavam com barras de bambu pintadas de preto os números negativos e com barras de bambu pintadas de vermelho os números positivos" (ROSSI, 2009, p.15).

No entanto foi na Grécia antiga, com Diofante (350-250 a.C), com a resolução de equações algébricas que se têm mais elementos para compreender a rejeição desse campo numérico, quando as soluções de raízes negativas eram descartadas, considerando apenas as raízes positivas como solução.

Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci (1170 – 1250), foi o "primeiro matemático a aceitar uma resposta negativa para um problema que envolvia o lucro de um comerciante, quando afirma que o problema proposto só teria solução se pudesse considerar a dívida do mesmo como um número negativo" (ROSSI, 2009, p. 16).

A aceitação definitiva só vai acontecer no sec. XIX com Henckel, quando conseguiu apresentar uma fundamentação por meio de leis mais formais para os números inteiros. A partir da organização proposta por Henckel, é que o conjunto dos números inteiros passou a ser interpretado como uma ampliação do conjunto dos Números Naturais, permitindo ao conjunto Z (dos números inteiros) ser estruturado a partir de N (conjunto dos Números Naturais), com regras e leis formais validadas de forma a se constituir em um novo campo numérico.

Foi com essa trajetória lenta e conflituosa que os Números Inteiros foram se constituindo ao longo da história.

Os estudos de Glaeser

Glaeser (1985) também se apoia em documentos históricos para identificar e discutir os obstáculos epistemológicos que dificultam a compreensão dos números inteiros relativos. Os estudos realizados identificam seis obstáculos: inaptidão para manipular quantidades negativas isoladas; dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas; dificuldade em unificar a reta numérica; a ambiguidade dos dois zeros, estagnação das operações concretas e o desejo de um modelo organizador.

1º Obstáculo: **Inaptidão para manipular quantidades negativas isoladas**

Glaeser (1985) traz como obstáculo a necessidade de manipular quantidades negativas, observa ao longo da história que Diofanto até enunciava a regra de sinal "O que falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta", mas não faz uso dela, demonstrando a sua não aceitação.

Este obstáculo mostra não só como o Diofanto não aceitava manipular as quantidades negativas, mas também o conflito que os estudantes enfrentam ao manipular quantidades negativas na hora de operar 2 + (-5) = -3 ou 2 x (-5) = -10.

2º Obstáculo: **Dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas**.

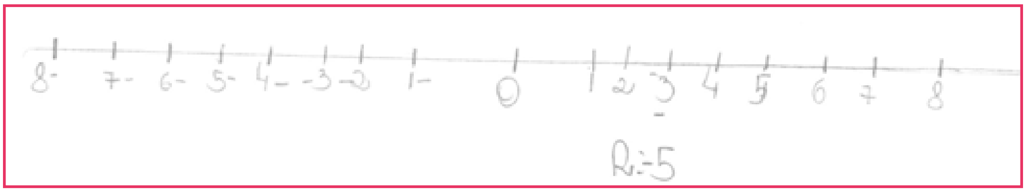
O autor explicita em seus estudos que muitos matemáticos como D'Alembert, Carnot (século XVIII) entre outros, sabem da existência de soluções negativas para equações, mas não as aceitam dizendo que elas expressam uma anomalia no enunciado do problema.

Isto também acontece hoje, se pedirmos para um estudante justificar qual o sentido que tem uma solução negativa em uma equação de 1º grau. Muitos estudantes diriam que esse resultado não faz sentido para eles.

3º Obstáculo: **Dificuldade em unificar a reta numérica**.

Isso aparece quando se observa as diferenças das quantidades negativas e das positivas ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais diferentes. O que favorece o modelo de duas semirretas opostas funcionando de forma isolada.

Vejamos a seguinte situação: Uma pessoa sai de um ponto O em uma estrada e percorre a distância de 2 Km para a direita de bicicleta, em seguida anda 7 km em sentido contrário na mesma estrada. Represente na reta numérica o percurso do ciclista.



Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Figura 16 - Representação do estudante A

4º Obstáculo: **A ambiguidade dos dois zeros.**

Muitos matemáticos durante séculos interpretaram o zero como sendo o zero absoluto, ou seja, abaixo dele nada poderia ser inserido. Por isso os números negativos foram considerados absurdos. A partir do momento em que o zero foi visto como origem, favoreceu a criação e a aceitação dos números inteiros na comunidade científica do momento, permitindo, assim, a utilização da reta numérica para visualizar os deslocamentos.

5º Obstáculo: **Estagnação nos estágios das operações concretas**.

A atribuição de sentido concreto aos números, relacionando-os às experiências cotidianas, não permitia o desenvolvimento dos números inteiros. Com o abandono da explicação das regras de sinais via considerações concretas para a via formal, favoreceu a compreensão do domínio desses números (HENKEL, 1867).

Essa mudança foi fundamental para se estruturar o conjunto dos números inteiros, uma vez que não se tratava mais de descobrir na natureza exemplos práticos, que exemplificassem os números negativos, mas sim de uma justificativa formal baseada nas necessidades internas da Matemática.

6º Obstáculo: **Desejo de um modelo unificador**.

O desejo de um modelo unificador que atendesse ao campo aditivo e que fosse válido também para o campo multiplicativo foi um obstáculo, uma vez que a reta numérica não é adequada para a multiplicação.

Isso só foi possível graças às justificativas formais da própria Matemática, que traz no conhecimento do oposto uma de suas possibilidades.

Epistemologia dos Números Relativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de matemática Wanderley Moura Rezende e Bruno Alves Dassie.
Disponível em: http://www.repositorio.uff.br/jspui/bitstream/1/524/2/GEPEM_Georges%20Glaeser.pdf

Em relação ao ensino dos Números Inteiros

Olhando para o percurso histórico de aceitação dos números inteiros e para os obstáculos epistemológicos apontados por Glaeser (1985), fica mais evidente por que se enfrentam tantas dificuldades para ensinar esse objeto matemático.

Pela leitura de diversas pesquisas, na observação de alguns livros didáticos ou nas orientações didáticas dos PCN[3] (1998), PC[4] (2008), OC[5] (2007) verifica-se que o conjunto dos Números Inteiros comumente é introduzido por meio de situações que tratam de perdas e ganhos em jogos, saldos bancários, ou como uma ampliação dos Números Naturais (N), onde a subtração de (a - b), onde b > a, dá origem a resultados que ainda não haviam pensado; ou seja, um número negativo (TEIXEIRA, 1993). Esse mesmo desconforto também ocorre quando se tenta explicar que a multiplicação de dois números negativos (-a).(-b) tem resultado positivo ab.

> Reflita sobre como normalmente se introduzem os números inteiros. Que situações são apresentadas, que exemplos são dados, etc.
>
> O trecho a seguir apresenta algumas situações.

Regras de Sinais

A. Mais um pouco de história para compreensão das regras de sinais

Como já vimos, foi no sec. XIX que tivemos a passagem de uma Matemática substancial para uma Matemática com a estrutura axiomática[6], ou seja, da Matemática "Concreta" para a Matemática "Abstrata". Peacock[7] (1791-1858) explicitou brilhantemente a tensão que existiu entre a Matemática substancial e a Matemática estrutural, quando estabelece a diferença entre álgebra aritmética e álgebra simbólica.

Esse autor traz para a discussão a questão da subtração de a – b, quando a < b. Na álgebra aritmética, os sinais + e - denotam as operações de adição e subtração apenas em seus significados mais naturais. Na álgebra simbólica, além de adotar os significados da álgebra aritmética, inclui as suas restrições que não eram possíveis ser contempladas nessa primeira. Assim, a subtração de a – b, onde a< b dos números inteiros passa a ser válida para se "resolver" o problema. "A importância histórica dessa divisão da álgebra

3 PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais

4 PC (2008) Proposta Curricular do Estado de São Paulo

5 OC (2007) Orientações Curriculares: Proposição de Expectativas de Aprendizagem

6 Sistema ou Estrutura Axiomática é o conjunto de axiomas que definem uma determinada teoria e que constituem as verdades mais simples a partir das quais se demonstram novos resultados.

7 Peacock- matemático inglês do século XVIII, viveu entre 1791-1858.

é que Peacock não tenta mais justificar empiricamente as operações que ele chamou de "impossíveis" (RAUL NETO, 2011, p. 14).

Esse autor traz a ideia do "princípio da permanência de formas equivalentes" como a expressão de leis gerais que possibilitam operar com os números inteiros. Um exemplo disso, é o uso na Aritmética da propriedade comutativa da adição para os números positivos a + b válida para qualquer a e b no conjunto dos Números Naturais. Ele faz a dotação das regras das operações utilizadas na Álgebra Aritmética para a Álgebra Simbólica, garantindo a sua validação nas duas Álgebras.

A partir das discussões apresentadas por Peacock (1842)

> Henkel percebe a necessidade da ampliação do conceito de número e organiza o princípio da permanência das leis formais que tratam a álgebra aritmética e a álgebra simbólica, não mais separadamente, mesmo quando os símbolos deixam de representar grandezas. Esse passo foi decisivo para o conceito de número negativo, nesse sentido a igualdade a +b = c será a soma c obtida de a e de b. (RAUL NETO, 2011, p.15).

Henkel[8] (1867) traz em seu principio da permanência das leis formais a existência do número negativo pela condição de que ele, adicionado ao seu oposto positivo, iguala a zero. O que Henkel fez foi organizar formalmente a Álgebra elementar através de axiomas. As quatro operações elementares realizadas no conjunto dos números reais e todas as suas propriedades operatórias, incluindo a regra dos sinais, bem como a introdução do negativo, são ou explicitamente enunciadas nos axiomas ou facilmente dedutíveis deles.

Hoje encontramos esses enunciados da seguinte maneira: No conjunto $\mathbb{R}$ (conjunto dos Números Reais) existem duas operações, a de adição e a de multiplicação, que devem satisfazer as seguintes propriedades:

Para a adição:

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ vale $x + y = y + x$.
- Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Existe um elemento em $\mathbb{R}$ que é neutro na adição, isto é, chamando esse elemento de 0, vale $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para cada elemento $x \in \mathbb{R}$ existe um elemento, representado por $- x$, tal que $x + (-x) = 0$.

Para a multiplicação:

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ vale $x \cdot y = y \cdot x$.
- Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

8 Henkel, H. - matemático alemão, viveu entre 1839 – 1873.

- Existe um elemento em $\mathbb{R}$ que é neutro na multiplicação, isto é, chamando esse elemento de 1, vale $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Para cada elemento $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe um elemento, representado por x -1, tal que x · x -1 = 1.
- Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Esta trajetória nos permite sintetizar todo o percurso histórico para a organização estrutural dos números inteiros e de suas regras.

Todo esse percurso histórico mostra a dificuldade percorrida pelos matemáticos. Os textos atuais são mais sintéticos, apresentam com clareza as ideias matemáticas e podem possibilitar a compreensão dos estudantes a respeito desse tema.

A construção sintetizada por Henkel, por meio de axiomas, registra a maneira pela qual, durante mais de um milênio, os matemáticos passaram por dúvidas, incertezas, erros, fizeram inúmeras tentativas para fundamentar a existência de um conceito.

Ao observar os axiomas da adição e da multiplicação, percebemos a existência da comutatividade e da associatividade tanto na adição quanto na multiplicação, a existência de um elemento neutro na adição, o 0 (zero), e o 1 (um) para a multiplicação. O último axioma da adição faz menção à existência do simétrico, permitindo assim ampliar o conjunto dos Números Naturais e deduzir a existência do número negativo, indicando $x + (-x) = 0$.

O quarto axioma da multiplicação indica que o 0 (zero) não tem inverso multiplicativo, logo não se admite dividir por zero. E, por último, temos a distributividade da multiplicação em relação à adição, permitindo estabelecer uma relação entre as duas operações: adição e multiplicação.

A subtração de a - b, entre dois elementos quaisquer de $\mathbb{R}$ é vista como a adição de a + (-b), ou seja, pelo inverso aditivo de b. Da mesma forma que a divisão a/b, b≠0 é definida:

$a.\ b^{-1}$

Temos que ressaltar que esse percurso histórico nos ajuda a compreender como se estruturou o conjunto dos números inteiros no âmbito da Matemática, mas ainda temos outro problema a tratar, que é o didático, para possibilitar a compreensão dessa estrutura.

B. Possibilidades didáticas para o ensino da adição e subtração

Uma das possibilidades para a compreensão das “regras de sinais” da adição e da subtração é iniciar o trabalho com situações cotidianas que envolvem compra e venda, saldo bancário, jogos, entre outras. Essas situações podem ajudar os estudantes a dar significado ao resultado, se positivo ou negativo.

Vejamos algumas situações que podem contribuir para que os estudantes, além de construir os significados das operações com os números inteiros, possam também sistematizar as regras para operar com compreensão. O exemplo a seguir se utiliza de uma situação de perdas e ganhos, que pode ser incluído no modelo de neutralização (CID, 2003).

> Pense em situações para que os estudantes compreendam as operações de adição e subtração de números inteiros.

Exemplo 1: Na conta bancária de um cliente havia um saldo devedor de R$ 200,00. O cliente emitiu mais um cheque de R$ 80,00. Calcule o saldo do cliente no banco depois do desconto desse cheque.

Como você pode representar esse resultado?

Qual a quantia que o cliente deverá depositar, no mínimo, para não dever mais nada ao banco, se não fizer nova retirada?

É preciso garantir que os estudantes tenham a oportunidade de descobrir as regularidades que proporcionam operar adição e subtração com números inteiros, compreendendo as regras e generalizando-as para qualquer situação em que elas aparecem.

Cid (2003, p.2) traz a introdução da indução como uma possibilidade interessante para que os estudantes pensem sobre essas duas operações – adição e subtração – e, a partir da observação, sistematizar as suas regras, exemplo:

Observe a seguinte sequência numérica de adição e de subtração:

Adição	Subtração
5 + 3 = 8 5 + 2 = 7 5 + 1 = 6 5 + 0 = 5 5 + (-1) = 4 5 + (-2) = 3 5 + (-3) = 2	5 - 3 = 2 5 - 2 = 3 5 - 1 = 4 5 - 0 = 5 5 - (-1) = 6 5 - (-2) = 7 5 - (-3) = 8
-5 + 2 = -3 -5 + 1 = -4	-5 - 2 = -7 -5 - 1 = -6
-5 + (-1) = -6 -5 + (-2) = -7	-5 - (-1) = -4 -5 - (-2) = -3

a. O que acontece com a segunda parcela da adição? Ela aumenta ou diminui?

b. E os resultados aumentaram ou diminuíram na sequência de adição?

c. A partir da sequência de adição, o que você poderia dizer sobre o resultado da adição de dois números positivos? E se tivermos um número positivo e um negativo?

d. O que acontece com o subtraendo na coluna da subtração? Ele aumenta ou diminui?

e. E os resultados na subtração, aumentaram ou diminuíram?

f. A partir da sequência de subtração, o que você diria sobre o resultado da subtração de dois números positivos? E se tivermos um número positivo e um negativo?

A partir das discussões dos estudantes e das observações construídas por eles, o professor pode sintetizar as seguintes regras para poder operar com a adição e com a subtração:

1. Quando temos números com sinais iguais, adicionamos mantendo o mesmo sinal dos números.

2. Quando os sinais são diferentes, devemos subtrair os números mantendo o sinal do número de maior módulo ou valor absoluto.

C. Possibilidades didáticas para o ensino da multiplicação e da divisão

Pense em outras situações próximas da realidade dos estudantes para que compreendam os significados da multiplicação e da divisão com números inteiros. Discuta se as situações propostas são boas para dar sentido à multiplicação e à divisão com Números Inteiros. Por quê?

Para começar a falar da multiplicação e da divisão de Números Inteiros, também é importante que os estudantes possam refletir sobre situações que lhes façam sentido. Escolhemos uma para ilustrar: Na entrada da escola, um menino perdeu 5 figurinhas em um jogo de bafo. Durante o intervalo, perdeu mais 5 figurinhas, jogou novamente na saída e perdeu mais 5 figurinhas. Depois dessas três rodadas, quantas figurinhas ele perdeu?

$$(-5) + (-5) + (-5) \text{ ou seja, } 3 \times (-5) = -15$$

Como acontece na adição e na subtração, é importante que os estudantes tenham a oportunidade de descobrir as regularidades que as operações de multiplicação e de divisão com Números Inteiros, de maneira que as regras sejam decorrência das observações feitas e assim possam generalizá-las.

A mesma possibilidade apresentada por Cid (2003, p.2), introdução da indução, pode também ser utilizada para a multiplicação e divisão de números inteiros, sistematizando as regras, a partir de observações. Vejamos outro exemplo:

Observe a seguinte sequência numérica de multiplicação e de divisão com números inteiros:

Multiplicação	Divisão
5 x 3 = 15 5 x 2 = 10 5 x 1 = 5 5 x 0 = 0	18 : 3 = 6 18 : 2 = 9 18 : 1 = 18
5 x (-1) = -5 5 x (-2) = -10 5 x (-3) = -15	18 : (-1) = -18 18 : (-2) = -9 18 : (-3) = -6
-5 x 2 = -10 -5 x 1 = -5	-18 : 2 = -9 -18 : 1 = -18
-5 x (-1) = 5 -5 x (-2) = 10	-18 : (-1) = 18 -18 : (-2) = 9

Observe a tabela acima, ela foi organizada em quatro partes:

a. Na primeira parte dessa tabela, temos a multiplicação de números positivos por números positivos e a divisão de números positivos por números positivos. O que acontece com o resultado dessas operações?

b. Na segunda parte da tabela, temos a multiplicação e a divisão de um número positivo por um número negativo. O que acontece com o resultado dessas operações?

c. Na terceira parte da tabela, temos a multiplicação e a divisão de um número negativo por um número positivo. O que acontece com o resultado dessas operações?

d. Na quarta parte dessa tabela, temos a multiplicação e a divisão de um número negativo por um número negativo. O que acontece com o resultado dessas operações?

A partir das discussões dos estudantes e das observações construídas por eles, o professor pode sintetizar as seguintes regras para solucionar problemas e cálculos envolvendo a multiplicação e divisão:

1. Quando temos números com sinais iguais (os dois positivos ou os dois negativos), multiplicamos ou dividimos estes números e o resultado será sempre positivo.

2. Quando os sinais dos números forem diferentes (um positivo e o outro negativo ou vice-versa), multiplicamos ou dividimos estes números e o resultado será sempre negativo.

D. Possibilidades didáticas para o ensino dos números inteiros por meio das dimensões do conhecimento

O desenvolvimento do trabalho com os números inteiros deve proporcionar uma ampliação do campo aditivo, por meio da "análise de situações em que esses números estejam associados a situações de diferença, de "falta", de orientação, de posições relativas ou funcionem como operadores" (PIRES; CURI; CAMPOS, 2001, p. 7).

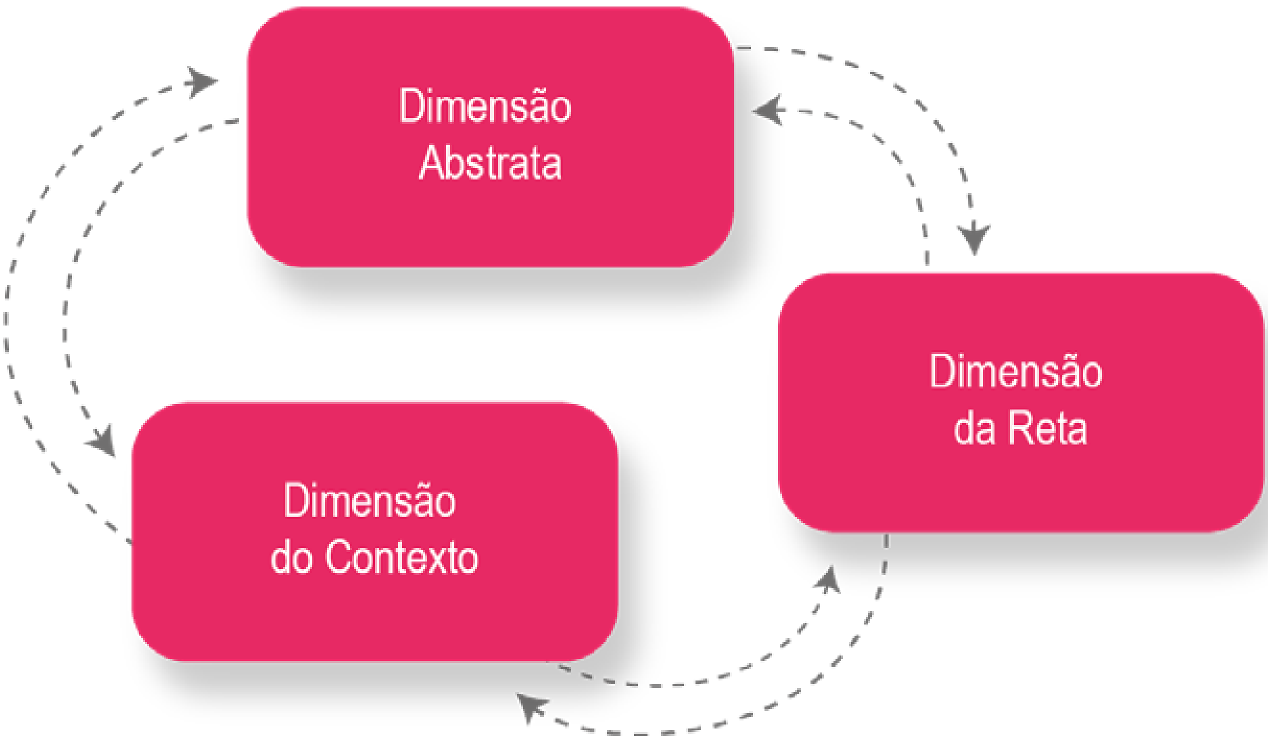
Para isso pode-se organizar o trabalho levando em conta as três dimensões para a aprendizagem dos números inteiros (BRUNO, 1997): dimensão abstrata, dimensão da reta e dimensão do contexto, relacionando-as entre si:

Dimensão Abstrata: essa dimensão envolve o conhecimento sobre os sistemas numéricos como estruturas matemáticas, as formas de escrita numéricas, os símbolos. As noções de adição e de subtração são identificadas mediante o uso da noção do oposto de um número. Assim, $a - b = a + (- b)$ e $a + b = a - (- b)$.

Dimensão do Contexto: situações concretas que envolvem os Números Inteiros.

Dimensão da Reta: envolve as representações dos Números Inteiros na reta, baseadas na identificação dos números como pontos da reta e como vetores, indicam as direções e o sentido.

O conhecimento numérico dos Números Inteiros não se limita e não deve ser visto focando-se apenas em uma dessas dimensões, mas ele deve estabelecer relações entre as dimensões, podendo abarcar a transferência de uma dimensão para a outra, como indicado a seguir:



Fonte: Bruno (1997, p.7)

Nesse sentido, as setas mostram a transferência de conhecimento que pode acontecer nos processos de ensino e aprendizagem dos números inteiros. As relações que podem ocorrer abarcam as seguintes dimensões de conhecimento:

- Abstrata para reta (AR);
- Abstrata para contexto (AC);
- Contexto para reta (CR);
- Contexto para abstrata (CA);
- Reta para abstrata (RA);
- Reta para contexto (RC).

Os exemplos a seguir podem ajudar a ilustrar o trabalho que o professor poderá organizar com sua turma, levando em conta as dúvidas que os estudantes possam ter:

1. Transferência da dimensão abstrata para a dimensão da reta:

Resolva as adições utilizando a reta numérica:

a. (+2) + 5 = b. (-8) + (+3)=

Figura17: Registro das representações das operações de adição na reta numérica

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

2. Transferência da dimensão abstrata para a dimensão do contexto:

Formule um problema que possa ser representado pela seguinte expressão:

(-2) + (+10) =

Figura 18: Formulação de problema

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

3.Transferência da dimensão do contexto para a dimensão da reta numérica:

Em uma estação de trem, o maquinista precisa realizar uma manobra: avançar 3 km, em seguida recuar 8 km para manutenção do comboio. Represente o movimento do trem em uma reta numérica.

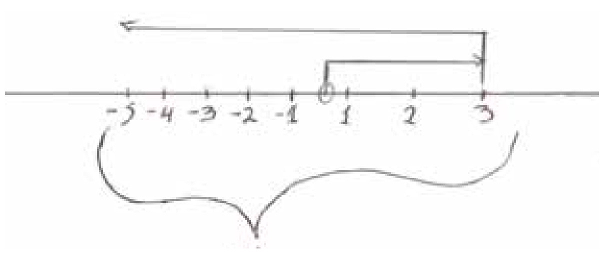


Figura 19: Representação da dimensão do contexto para a reta numérica

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

4. Transferência do contexto para a dimensão abstrata:

A tabela abaixo indica a temperatura média de algumas cidades do mundo no mês de julho de 2017:

Cidade	Temperatura média em julho de 2017
Gramado	13° C
Madri	38° C
Bariloche	-8° C
Sydney	7° C

Verifique qual a variação de temperatura que uma pessoa sofreria se saísse:

- de Bariloche e fosse para Sydney ;
- de Gramado e fosse para Bariloche, mas passasse antes por Madri.

Essas são algumas situações que podem contribuir para que os estudantes atribuam diferentes significados aos números inteiros relativos, permitindo que estabeleçam relações entre as dimensões do conhecimento e sistematizem as regras que permitem a compreensão desse conjunto numérico e maior agilidade no cálculo.

Ao final da leitura deste texto, analise os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento previstos no Currículo da Cidade, verificando se eles contribuem para a aprendizagem dos estudantes segundo as premissas apresentadas nas Orientações Didáticas.

Números Reais

Introdução

Faça uma retrospectiva sobre a organização que você costuma usar para a abordagem dos diferentes tipos de números em cada ano de escolaridade. Em que ano você introduz cada um desses conjuntos? Você trabalha com um conjunto numérico a cada ano de escolaridade ou depois de introduzi-lo você continua explorando esse conjunto numérico nos anos posteriores? Já analisou o Currículo da Cidade para verificar como é feita essa organização?

Faça anotações com suas respostas e continue a leitura do texto.

Neste texto vamos discutir várias abordagens para o estudo dos números ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental.

Ao analisar o Currículo da Cidade, é possível identificar em que ano de escolaridade os conjuntos numéricos são introduzidos e formalizados e como são abordados. O quadro a seguir apresenta a distribuição por ano de escolaridade de cada conjunto numérico.

NÚMEROS	1º ANO	2º ANO	3º ANO	4º ANO	5º ANO	6º ANO	7º ANO	8º ANO	9º ANO
Naturais	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Racionais positivos				X	X	X	X	X	X
Inteiros negativos							X	X	X
Racionais negativos							X	X	X
Irracionais									X

Analisando o quadro, é possível observar que os Números Naturais e suas operações são introduzidos logo no primeiro ano do Ciclo de Alfabetização e devem ser abordados durante os 9 anos de escolaridade, e a ordem de grandeza dos números vai se ampliando ano a ano. A introdução dos Números Naturais escritos com vírgula para indicar a ordem de grandeza, por exemplo, 3,05 bilhões, é indicada a partir do 6º ano, e a notação científica dos Números Naturais, em forma de potenciação, a partir do 8º ano.

Abordagens possíveis

Uma das abordagens possíveis é feita pelos conjuntos numéricos. Esse tipo de tratamento era muito comum há alguns anos e, nessa época, o conjunto dos Números Inteiros era abordado no Ensino Fundamental antes do conjunto dos Números Racionais. O conjunto dos Números Racionais, quando tratado, já incorporava os Números Inteiros (positivos e negativos).

Aconselha-se a abordagem dos conjuntos numéricos no Ciclo Autoral em que é possível fazer algumas sistematizações.

Leia a primeira parte do texto e pense em atividades para explorar relações de pertinência e inclusão existentes entre esses conjuntos.

Vamos explorar o conjunto dos Números Naturais, seus elementos e algumas características.

O conjunto dos Números Naturais se inicia no zero e é composto por infinitos números. Ele é ordenado, pois entre dois Números Naturais quaisquer é sempre possível dizer se são iguais, ou se um é menor ou maior que o outro. Os Números Naturais são aqueles com os quais convivemos diariamente.

Conjunto dos **Números Naturais:**

$\mathbb{N} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots \}$

Nesse conjunto é possível estabelecer algumas relações de pertencimento. É fácil perceber quais números pertencem a esse conjunto e quais não pertencem, e representar essas relações simbolicamente: $5 \in \mathbb{N}$.

Os Números Naturais permitem realizar algumas operações como a adição e a multiplicação. O resultado de uma adição de Números Naturais é sempre um Número Natural. O mesmo ocorre com a multiplicação. No entanto nem sempre a subtração de dois Números Naturais tem como resultado um Número Natural, apenas quando o minuendo é maior que o subtraendo. Quando isso acontece, o resultado da subtração é um Número Inteiro. Da mesma forma, na divisão. Nem sempre o resultado de uma divisão de dois Números Naturais é um Número Natural. Isso acontece apenas quando o dividendo é múltiplo do divisor. Quando isso não acontece, o resultado da divisão é um Número Racional.

Como você já tem conhecimento, além dos Números Naturais, há o conjunto dos Números Inteiros, que é formado por números positivos e negativos. Ele também é infinito.

O surgimento dos Números Inteiros com valores negativos explica relações que só os Números Naturais já não davam conta de representar, por exemplo, casos de subtração em que o minuendo é menor do que o subtraendo.

Nesse conjunto, quanto mais afastado do zero um número negativo se localiza, menor ele é. Qualquer número negativo é menor que o zero ou que um número positivo. O conjunto dos Números Inteiros também é ordenado, pois entre dois números inteiros quaisquer é sempre possível dizer se são iguais ou se um é menor ou maior que o outro.

Conjunto dos **Números Inteiros:**

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots , -2 , -1 , 0 , 1 , 2, \ldots \}$$

Também nesse conjunto é possível perceber relações de pertencimento: $5 \in \mathbb{Z}$; $-5 \in \mathbb{Z}$. Mas como esse conjunto é uma ampliação do conjunto dos Números Naturais, há relações de inclusão, pois todo número natural é inteiro, então N é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

Conjunto dos **Números Racionais**

O surgimento dos números racionais está associado à noção de medida, que nem sempre pode ser representada por um Número Natural, ou ainda às situações em que o dividendo não é múltiplo do divisor e a divisão não dá um quociente exato. O nome Racional vem de razão.

Os Números Racionais são aqueles que podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros quaisquer, com b diferente de 0.

O conjunto dos Números Racionais é representado pela letra Q e é definido como: $\frac{x}{x} = \frac{a}{b}$

$Q = \{ \frac{x}{x} = \frac{a}{b}$ com a e b pertencentes a $\mathbb{Z}$ com b diferente de 0 $\}$

Eles podem ser representados nas formas fracionária e decimal.

As representações decimais indicam números exatos ou periódicos. Elas são frutos de uma divisão exata do numerador pelo denominador de uma representação fracionária:

$$0,1 = \frac{1}{10}$$

$$2,3 = \frac{23}{10}$$

As representações periódicas também são decorrentes da divisão do numerador pelo denominador de uma representação fracionária, porém essa divisão não é exata:

$$0,1111\ldots = \frac{1}{9}$$

Você já observou que os números com representação decimal em que aparecem reticências causam sempre instabilidade nos estudantes, como no caso de 0,33..., que, às vezes, é considerado um número irracional mesmo por estudantes do Ciclo Autoral?

$$0{,}3232\ldots = \frac{32}{99}$$

$$2{,}3333\ldots = \frac{21}{9}$$

$$0{,}2111\ldots = \frac{19}{90}$$

Mesmo com a representação fracionária de $\frac{1}{10}$, os estudantes classificam 0,333....como um número racional. Pesquisas mostram que as reticências na representação decimal do número 0,333.... são associadas com a irracionalidade pelos estudantes e podem ser apontadas como a causa da confusão. A hipótese é de que os estudantes fazem a associação de infinitas casas decimais com a irracionalidade. $\subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \supset$

Também no conjunto dos Números Racionais há relações de pertinência e inclusão.

$\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$; $-\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$.

Todo número natural é racional e todo número inteiro é racional, então $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ou $Z \subset \mathbb{Q}$ da mesma forma, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$, ou $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ ou ainda $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, ou $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

Conjunto dos **Números Irracionais**

Os Números Irracionais são aqueles que não podem ser expressos na forma $\frac{1}{5}$, com a e b inteiros e b diferente de 0. Os mais conhecidos são: o número PI (π), a raiz quadrada de dois ($\sqrt{2}$). Se dispusermos a calcular a raiz quadrada de 2 ou de 3, jamais conseguiremos fazê-lo, pois esses números possuem infinitas casas decimais que não se repetem como uma dízima periódica, não podendo ser expressas na forma de uma fração. Essa é uma característica dos números irracionais. Dessa forma, a raiz quadrada de qualquer número natural que não seja um quadrado perfeito é um número irracional. Veja os valores aproximados de alguns números irracionais:

- Constantes irracionais ou números transcendentais:

$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$

- Números irracionais obtidos pela raiz quadrada de um número:

$$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$$

Agora vamos tratar do conjunto dos **Números Reais**

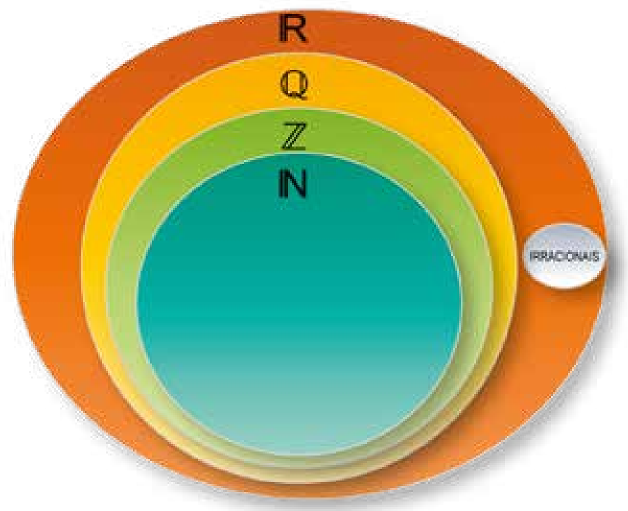
O conjunto dos Números Reais é formado pela reunião do conjunto dos Números Irracionais com o dos Racionais.

Há uma relação de inclusão entre os conjuntos numéricos abordados, ou seja:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

O diagrama a seguir também indica essa inclusão:

CONJUNTOS NUMÉRICOS



Cabe destacar que o conceito de Número Real criou dificuldades aos matemáticos ao longo do tempo, pois noções sobre incomensurabilidade de grandeza, de contínuo, de limite, etc. não são tão claras. A continuidade da reta real demorou séculos para receber uma sistematização matemática, o que aconteceu em 1872 com Dedekind.

Leia a segunda parte do texto e pense em atividades nas quais pode ser explorado o uso social os números.

Também com os estudantes, há dificuldades com a concepção dos números reais. A pesquisadora francesa Michèle Artigue[9] (1995) afirma que pesquisas atuais mostram que as relações existentes entre os diferentes conjuntos numéricos não são claras para os estudantes. Segundo ela, os estudantes consideram o conjunto dos Números Reais como se fosse composto por diversas categorias diferentes de números: os Inteiros, os Racionais (nas representações fracionárias e decimais), os números que se expressam por meio de radicais e outros como o número π. A pesquisadora afirma que essas categorias numéricas tendem a se confundir na associação de um número real com uma representação decimal, hoje reforçada pelo uso das calculadoras. Ela afirma ainda que se os estudantes

9 Michèle Artigue - pesquisadora matemática francesa, uma das responsáveis pelo estabelecimento do método e teoria da engenharia didática.

associam os Números Reais com a reta numérica, esta associação não corresponde necessariamente à visão que eles têm do contínuo numérico.

Outra abordagem

Mas essa não é a única abordagem possível da introdução dos números no Ensino Fundamental. Nos textos de Números Naturais, Inteiros e Racionais apresentados neste documento, você certamente já viu a abordagem desses conjuntos numéricos por meio dos seus usos e significados. Vamos retomar essa abordagem no próximo item e ampliar para os Números Irracionais. Se quiser ampliar seus conhecimentos, retome aos textos citados.

Por seus usos

Como as abordagens dos números por seus usos já foram detalhadas em outros textos, neste apresentamos apenas um quadro síntese das possíveis abordagens e alguns exemplos.

Naturais	Quantificação (cardinal)	Quantas páginas tem o livro?
	Ordenação (ordinal)	Qual a colocação de seu time no campeonato?
	Medição	Quantas vezes a barrinha azul cabe na amarela?
	Codificação	Qual é o número de seu telefone?

Racionais Positivos Kieren (1980)	Parte-todo	Uma pizza foi dividida em 8 partes iguais e João comeu 3 dessas partes.
	Quociente	O que acontece quando dividimos 2 folhas de papel entre 3 crianças?
	Razão	2 dentre 5 entrevistados numa pesquisa estão contra esse projeto de lei.
	Operador	Que número multiplicado por 2 resulta $\frac{2}{23}$
	Medida	Situações em que se necessita de um número racional para expressar a medida de uma grandeza em que os Números Naturais não são suficientes.

Inteiros (CID - 2003)	Neutralização: Pontos ganhos e perdidos, créditos e débitos, saldos positivos e negativos, lucros e prejuízos e outros.	João depositou R$150,00 e fez um débito de R$ 185,00.
	Deslocamento: Temperaturas e termômetros, altitudes acima ou abaixo do nível do mar, elevadores, percursos, fatos ocorridos no tempo.	A temperatura de uma cidade pela manhã era de 10 graus e, à tarde, passou a 5 graus

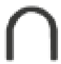
A terceira parte deste texto apresenta uma possível abordagem histórica para o ensino.

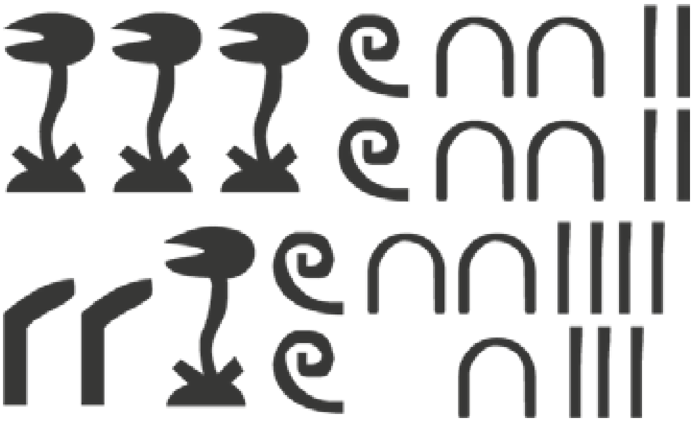
Abordagem histórica

Um terceiro tipo de abordagem é a abordagem histórica. Trabalhando com alguns sistemas de numeração antigos, como o egípcio, o romano, o maia, o babilônico, além de analisar o desenvolvimento histórico do conhecimento matemático, é possível compreender as regras do Sistema de Numeração Decimal (SND) utilizado no nosso cotidiano.

O sistema de numeração egípcio

Analise os números escritos a seguir e descubra qual o valor que representam e formule "regras" para o sistema de numeração egípcio. Depois continue a leitura do texto.

	bastão	1	(um)
	calcanhar	10	(dez)
	rolo de corda	100	(cem)
	flor de lótus	1 000	(mil)
	dedo apontando	10 000	(dez mil)
	sapo ou girino	100 000	(cem mil)
	homem sentado	1 000 000	(um milhão)

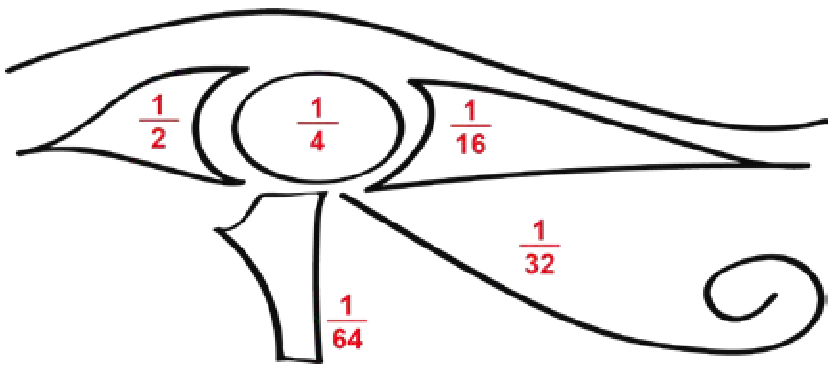


Os egípcios usavam um sistema de numeração que não se preocupava com a ordem dos símbolos, ou seja, não era um sistema posicional como o SND. Esse sistema de numeração servia para efetuar cálculos que envolviam Números Naturais. Adota o princípio aditivo, ou seja, os símbolos possuem seus respectivos valores individuais e podem ser repetidos até 9 vezes. Esses símbolos juntos passam a formar novos valores pela simples adição. Mas esse povo também tinha uma organização para os "números fracionários" que era baseada no conceito unitário. A maioria das "frações" tinha numerador 1 (um) – representado por um sinal de forma oval e alongada. As "frações" eram denominadas frações unitárias e correspondiam a símbolos diferentes.

As frações do tipo $\frac{1}{2n}$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}...)$ tinham símbolos especiais, surgindo da associação com o olho de Horus. Tem a ver com a série infinita $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cdots = 1$.

Não se sabe se os egípcios tinham a ideia de que essa sucessão terminava no $\frac{1}{64}$ porque não conseguiam distinguir pedaços menores do que esse, mas a ideia seria que todos juntos formariam a unidade. A Figura a seguir mostra, no olho de Horus, os símbolos de cada "fração".

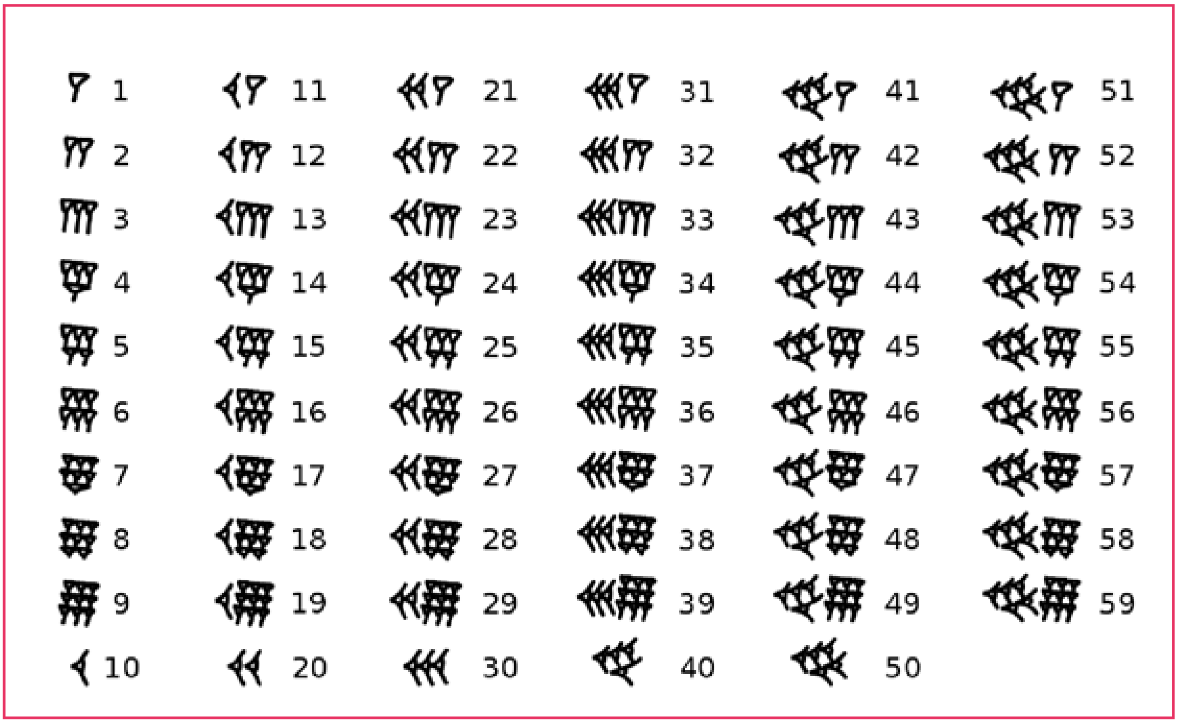
Olho de Horus.



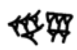
Fonte: Bakos (2005, p. 60).

Nessa figura, $\frac{1}{2}$ representa o olfato; $\frac{1}{4}$ representa a visão; $\frac{1}{8}$ representa o pensamento, que seria a sobrancelha; $\frac{1}{16}$ representa a audição; $\frac{1}{32}$ representa o paladar, uma língua comprida; $\frac{1}{64}$ representa o tato, que seriam as duas perninhas em contato com o mundo embaixo.

Agora observe o quadro a seguir, com os símbolos numéricos usados no sistema de numeração babilônico[10].

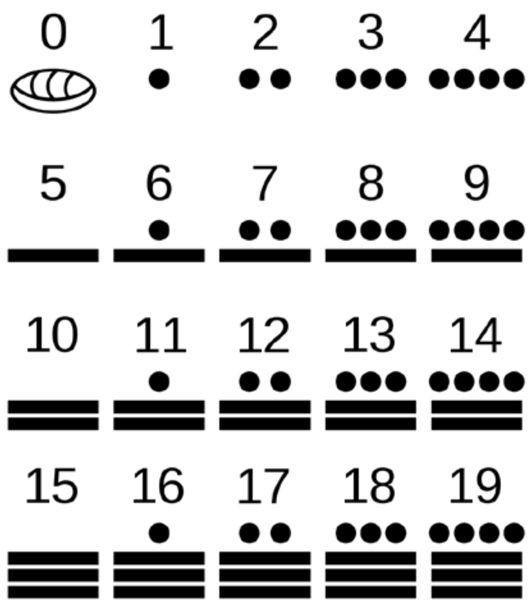


Você sabia que o funcionamento do nosso sistema de horas, minutos e segundos é herança do sistema babilônico?

O sistema babilônico utiliza 60 símbolos para a formação de seus números, de 0 a 59. Para compor seus números, usavam a base 10 (também utilizada no sistema de numeração decimal) para associar símbolos que correspondiam aos 60 símbolos necessários para a formação de um número. Os babilônios já tinham o conceito do zero e indicavam esse algarismo com um espaço vazio, pois o zero não representava quantidade. O sistema babilônico era posicional como na representação a seguir do número 45: 

10 Alguns historiadores como Ifrah denominam de Mesopotâmica.

No quadro a seguir, estão os símbolos do sistema de numeração maia.



Este sistema foi adotado pela civilização pré-colombiana e consiste em um sistema de numeração vigesimal, isto é, de base vinte.

Você sabia que o Sistema Vigesimal possui como base a soma dos números de dedos das mãos e dos pés?

Os símbolos do sistema de numeração Maia são o ponto e a barra horizontal, e no caso do zero, uma forma oval parecida com uma concha. A soma de cinco pontos constitui uma barra. Se usarmos os símbolos maias para escrever o número oito, utilizaremos três pontos sobre uma barra horizontal.

Escreva no Sistema de Numeração Maia o número 84. Observe similaridades e diferenças com o SND.

Os números 4, 5 e 20 eram importantes para os Maias, pois esses povos tinham a ideia de que o 5 formava uma unidade (a mão) e o número 4 estava ligado à soma de quatro agrupamentos de 5, formando uma pessoa (20 dedos). Os povos maias foram os primeiros a utilizar o símbolo do zero que significava um valor nulo. Também é atribuído ao Sistema de Numeração Maia a organização dos números em ordens numéricas.

O Sistema de Numeração Romano é usado ainda hoje na indicação de séculos e datas; de capítulos e volumes de livros; de mostradores de alguns relógios, etc. Ele é interessante, pois utiliza letras como símbolos numéricos.

1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

O que chama sua atenção no Sistema de Numeração Romana em relação ao sistema de numeração decimal?

Para formar outros números romanos, utiliza-se o princípio de repetição das letras até três vezes e as **letras V, L e D não podem ser repetidas**.

Para formar alguns números, as letras I, X e C podem ser colocadas à esquerda ou à direita de outras de maior valor.

Se colocarmos um símbolo de maior valor primeiro que o de menor valor, somamos os números, VI representa 6 (5 + 1). Se colocarmos um símbolo de menor valor primeiro que o de maior valor, diminuímos os números, IV representa 4 (5 – 1).

Agora que você estudou alguns sistemas numéricos compare-os com o SND, indicando similaridades e diferenças na composição das escritas numéricas.

Assista ao vídeo A História do Número.
Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ produzido pela da TV Escola.
http://tvescola.mec.gov.br/images/sto...

Foto: Paula Letícia - Núcleo de Foto e Vídeo Educação / CM / COPED / SME

Eixo Álgebra

Iniciação ao pensamento algébrico

Introdução

Este texto apresenta algumas reflexões sobre a iniciação ao pensamento algébrico nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Considerando o Currículo da Cidade de Matemática, apresentamos aqui algumas discussões conceituais, e principalmente práticas, que poderão subsidiar o trabalho dos professores dos Ciclos de Alfabetização e Interdisciplinar com relação aos atuais debates conceituais que vêm se dando no Brasil.

Como você enxerga o ensino de álgebra a partir do Ciclo de Alfabetização? Você sabe como se dá o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico?

A iniciação ao pensamento algébrico não é sinônimo de antecipação de procedimentos tradicionalmente reproduzidos. Muito pelo contrário, significa conceber o ensino da Álgebra a partir de uma nova perspectiva, mais integrada e interessante, em que as crianças possam desenvolver capacidades matemáticas motivadas por situações ricas e com sentido, que lhes possibilitem a construção de conhecimentos algébricos com compreensão, ampliando o seu patrimônio quer seja no nível de processos ou de produtos matemáticos (CANAVARRO, 2007).

Durante muitos anos, a concepção geral sobre o ensino da Álgebra foi caracterizada por tarefas que tinham como objetivo a simplificação de expressões algébricas, a resolução de equações e a aplicação de regras para manipular símbolos, com elevado nível de abstração (KAPUT, 1999; PONTE, 2006). No Brasil, por exemplo, por muito tempo o ensino da Álgebra esteve previsto a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, com ênfase no cálculo algébrico e em regras de manipulação de expressões que envolviam variáveis. Somente em dezembro de 2012, a partir da publicação do documento "Elementos Conceituais e Metodológicos para definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1°, 2° e 3°anos) do Ensino Fundamental"[11] pela Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação, é que o pensamento algébrico foi contemplado como um dos eixos estruturantes de conhecimento da Matemática proposto para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Recentemente, a BNCC em sua terceira versão (abril de 2017), propôs a Álgebra como uma das cinco unidades temáticas relativas aos conhecimentos matemáticos. Nesse documento podemos ler sobre o eixo Álgebra:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2017, p. 226).

A Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os estudantes identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criem, interpretem e transitem entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados.

Antes de discutirmos as questões práticas de iniciação ao pensamento algébrico, que é o principal objetivo deste texto, vamos discutir a respeito de alguns conceitos importantes.

11 <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=12827-texto-referencia-consulta-publica-2013-cne-pdf&category_slug=marco-2013-pdf&Itemid=30192> Acesso: em 17 abr. 2017.

O desenvolvimento do pensamento algébrico

Kieran (2007) comenta que resultados de pesquisas apontam para a importância de promover a generalização algébrica logo nos primeiros anos de escolaridade, sem que necessariamente sejam utilizadas notações algébricas. Assim, o estudo da Álgebra não deve ser apenas uma técnica, mas uma forma de raciocínio sobre situações matemáticas, denominado pensamento algébrico. Há um consenso entre os estudiosos de que o pensamento algébrico se manifesta e se desenvolve quando, nomeadamente, os estudantes se envolvem no processo matemático de generalização, tendo por base a observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas, e expressam essas generalizações usando recursos diversos que podem passar pela utilização da linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos. Assim, é importante saber que a Álgebra, segundo Kaput (2008), é caracterizada por dois aspectos centrais:

a. a generalização simbólica de regularidades;

b. o raciocínio sintaticamente guiado por ações expressas no sistema de símbolos convencionais.

A generalização é uma das principais finalidades do ensino da Matemática e devido a sua natureza, os padrões se constituem um contexto privilegiado para desenvolvê-la. Trata-se de um caminho para explorar habilidades importantes como a formulação e validação de hipóteses e conjecturas.

A ideia fundamental em um padrão está associada à repetição e ao crescimento. Um padrão é classificado como de repetição se houver um motivo que é identificado e que se repete de forma cíclica e indefinidamente. Um padrão é considerado como de crescimento se cada termo sofrer uma alteração de forma previsível em relação ao termo anterior. Padrões de repetição e de crescimento têm uma importância significativa na descoberta de conceitos, propriedades e resolução de problemas em Matemática (VALE, 2009).

Quando esse padrão se repete, chamamos de sequência recursiva (ou recorrente), pois um determinado elemento pode ser calculado em função do padrão (regularidades dos elementos anteriores/posteriores) na sequência.

A promoção da capacidade de generalização e, consequentemente, do pensamento algébrico, pode ser alcançada a partir da exploração de tarefas em duas vertentes, com o objetivo do desenvolvimento do pensamento relacional e do pensamento funcional.

No pensamento relacional, a construção de generalizações ocorre a partir de relações numéricas e das operações aritméticas e suas propriedades, e ainda da noção de equivalência associada ao sinal de igual (=) (CARPENTER et al., 2005). As crianças fazem uso do pensamento relacional quando, ao olharem para expressões aritméticas e algébricas, as analisam como um todo, distinguem detalhes, reconhecem relações e as utilizam para construir uma solução estratégica.

Para Blanton (2008), as funções são o núcleo do pensamento funcional, que é um processo de construir, descrever e raciocinar sobre funções e envolve o pensamento algébrico por incluir o fazer generalizações a partir do estabelecimento de relações entre os dados.

Assim, a Aritmética pode ser o contexto privilegiado para integrar as características do pensamento algébrico, levando em conta as suas inerentes regularidades, equivalências, múltiplas formas de conceituar as relações numéricas, analisar e representar relações entre quantidades e também com o seu lado funcional, que inclui estudar padrões, analisar como variam as quantidades e identificar correlações entre variáveis (MOLINA, 2011).

Algumas orientações sobre o trabalho de iniciação algébrica

Com o objetivo de promover avanços no processo de iniciação à álgebra para crianças, é importante que o professor organize e proponha atividades de natureza exploratório-investigativa que propiciem a capacidade de generalização a partir do pensamento relacional e funcional. Assim, a seguir, apresentamos alguns exemplos que poderão ser ampliados e adequados pelo professor de acordo com as necessidades da sua turma.

Exemplo de situações que exploram o pensamento relacional

Para ilustrar uma situação que explore a compreensão relacional de igualdade em diferentes sentenças matemáticas envolvendo adições, propomos que as crianças coloquem nos quadrinhos dois números para que a soma seja igual a 20 e solicitamos que elas apresentem duas soluções diferentes para as operações.

$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{20}$$

$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{20}$$

A partir das soluções apresentadas, por exemplo, 12 e 8 e outra solução 9 e 11, estabelecemos a escrita 12 + 8 = 9 + 11 para a discussão com as crianças sobre o significado do sinal de igual, que nesta situação não é utilizado para expressar o resultado de uma adição, mas, sim, o significado de equivalência, em que na expressão numérica 12 + 8 = 9 + 11 os termos à direita e à esquerda do sinal de igual não são idênticos. Embora diferentes, representam o mesmo resultado.

> Você já propôs situações semelhantes a essa em sala de aula? Você sabia que estava trabalhando com um raciocínio algébrico?

O professor pode propor atividades como as apresentadas a seguir, para que as crianças completem cada quadrinho com o objetivo de tornar a sentença verdadeira.

a) $\boxed{15} + \boxed{121} = \boxed{121} + \boxed{}$

Uma hipótese possível para a solução é de que determinem o resultado da adição apresentada no 1° membro da igualdade e pensem qual o valor a ser adicionado à parcela existente no 2° membro. Tal procedimento não caracteriza um pensamento algébrico que será manifestado, por exemplo, se a criança apreender a expressão numérica como um todo e identificar que o valor a ser considerado na sentença a) é 15, fazendo uso da propriedade comutativa, sem a necessidade da realização de um procedimento de cálculo. Diferente da situação a seguir proposta na sentença b).

b) $\boxed{14} + \boxed{19} = \boxed{} + \boxed{20}$

Na sentença b), pode considerar que vinte apresenta uma unidade a mais que dezenove. Portanto, o número a ser registrado no quadrinho em branco deverá ter uma unidade a menos que catorze, obtendo treze por uma compensação aditiva. Neste procedimento, é possível considerar que a criança utiliza implicitamente a propriedade associativa da adição, ao decompor 14 em 13 + 1 e transformar 14 + 19 em 13 + 1 + 19, obtendo a seguir, 13 + 20. Outra possibilidade seria considerar 14 + 19 transformada em 14 + 19 + 1 – 1, e, a seguir, agrupar convenientemente para relacionar com o valor apresentado no 2° membro, obtendo 14 + 20 – 1 e, em seguida, 13 + 20. Nesta situação, a criança faz uso da relação a + b + c – c como uma expressão equivalente a a + b.

> A partir de situações semelhantes a essas reflita sobre como trabalhar o pensamento relacional com as crianças

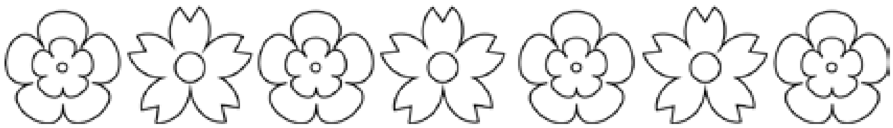
Exemplo de situações que exploram o pensamento funcional

Situações relativas ao pensamento funcional podem ser planejadas por meio de atividades que explorem o reconhecimento de regularidades e a descrição de padrões existentes em uma sequência repetitiva de figuras (ou números) e possibilitem a generalização.

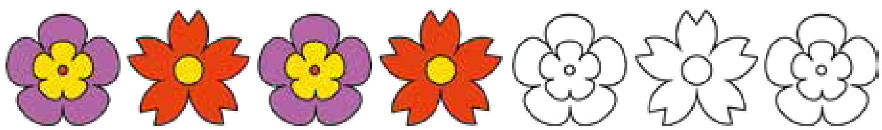
Vejamos alguns exemplos de atividades.

Atividade 1

Giovanna e Júlia encontraram em uma revista de passatempo uma ilustração para ser pintada.



Giovanna começou a pintar e pediu que Júlia continuasse, mas que fizesse observando o padrão que ela estava utilizando. Veja o que Giovanna já realizou.



Júlia perguntou: - *O que é padrão?*

Giovanna disse: - *É o que está sendo repetido nessa figura.*

Júlia, então, respondeu: - *A ordem das flores e as cores utilizadas.*

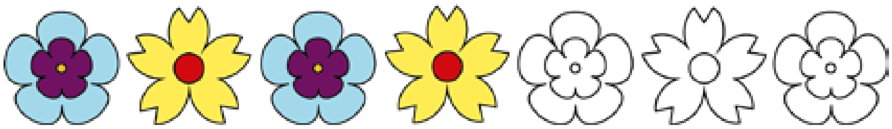
E Giovanna concluiu: - *Isso mesmo.*

Ajude Júlia a completar a pintura, respeitando o padrão estabelecido por Giovanna.

Considerando a faixa etária das crianças que você trabalha, como você abordaria o conceito de padrão? Qual é a linguagem mais apropriada para definir o seu significado de modo que as crianças compreendam?

Atividade 2

Júlia disse que poderia pintar as flores criando outro padrão. Veja o que ela fez. Continue pintando as flores conforme o padrão de Júlia.

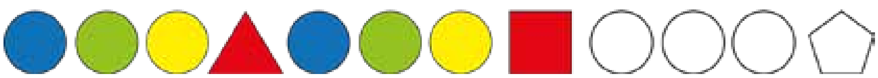


Para que as crianças possam observar e identificar os padrões presentes nas sequências, é importante que o professor realize intervenções pontuais a partir de boas perguntas. Como você conduziria esse momento?

O reconhecimento e a descrição de padrões presentes em uma sequência crescente de figuras também possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico, ao propiciar a generalização. Vejamos a atividade apresentada a seguir:

Atividade3

Juliana começou a desenhar uma sequência de figuras, mas não pintou todas. Veja o que ela já fez:



Agora, responda às questões:

a. Explique como ela está construindo a sequência de figuras e complete a pintura.

b. Quando ela completar as 20 primeiras figuras, quantas figuras estarão pintadas de azul? Por quê? E de vermelho?

c. Que figura deve ser desenhada na 16ª posição? Explique. E na 28ª posição? Justifique sua resposta.

Quais padrões em relação às cores e figuras você consegue identificar na sequência?

A atividade é sugerida para uma turma de 3º ano e apresenta uma sequência de figuras em que as oito primeiras estão pintadas e as quatro seguintes têm apenas desenhados seus contornos. Há um padrão relativo às cores utilizadas nas pinturas das regiões internas: azul, verde, amarelo e vermelho. Cada unidade que se repete é formada por três círculos, seguido de um polígono, que apresenta crescimento em relação ao número de lados: triângulo, quadrado, pentágono, ...

Para responder aos itens b) e c), é possível que as crianças desenhem as figuras até chegarem às posições citadas. Espera-se, porém, que identifiquem a regularidade sobre a repetição de uma figura a cada quatro figuras apresentadas e relacionem a posição dos polígonos aos números 4, 8, 12, 16,... e, dessa forma, concluam que nas posições 16 e 28 devem ser desenhados polígonos. Porém, qual a quantidade de lados desses polígonos? Isso pode, por exemplo, ser obtido a partir identificação de que na posição 4 há um polígono com 3 lados, na posição 8, um polígono de 4 lados, na posição 12, um polígono de cinco lados e assim, na posição 28, que corresponde ao sétimo múltiplo positivo de 4, um polígono de 9 lados, ou seja, um eneágono.

Você acha possível adaptar este tipo de atividade para as turmas dos anos anteriores (3º, 2º e 1º)? Como?

Tais relações permitem que as crianças estabeleçam generalizações próximas, quando a questão formulada pode ser resolvida passo a passo por contagem ou desenho (STACEY,1989).

A atividade descrita a seguir tem como objetivo reconhecer e descrever padrões existentes em uma sequência numérica que apresenta crescimento obtido pela adição ou subtração de um valor fixo ao elemento anterior e determinar um elemento para ampliação da sequência ou um elemento faltante.

Giovanna escreveu números em cartões e formou sequências. Escreva os números que você considera que devem ser escritos em cada um dos cartões pintados de amarelo e justifique sua resposta.

a)	15	21	27	33		
b)		82	78	74		

No item a), há uma sequência formada por seis números da ordem das dezenas em que cada elemento é igual ao anterior adicionado a 6, em que os dois últimos são desconhecidos. A identificação desse padrão possibilita serem determinados esses elementos, que são 39 e 45.

No item b), são apresentados três números, em ordem decrescente, cuja diferença entre dois números consecutivos da sequência é igual a 4. Há o primeiro elemento faltante que pode ser obtido pela adição de 4 a 82, encontrando 86, enquanto os dois últimos elementos podem ser obtidos a partir da subtração de 4 a 74, determinando 70 e, novamente, subtraindo 4 a 70, encontrando 66.

Ao final da leitura deste texto, analise os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do Currículo da Cidade relativos à Álgebra, verificando a sua progressão no ciclo em que você atua.

Apresentamos neste texto algumas propostas de atividades de iniciação ao pensamento algébrico e você pode ampliar possibilidades a partir da leitura sugerida no Saiba Mais.

Leia o artigo de Canavarro (2007) "O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos".
Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf

Algumas reflexões sobre a construção do pensamento algébrico

Introdução

Nos tempos atuais, pesquisadores discutem as perspectivas do ensino de Álgebra com enfoques diferentes, mas que convergem para um foco central – o fato de a Álgebra ser indispensável para a organização das ações cotidianas e do entendimento do indivíduo no contexto em que está inserido.

Mas, afinal, quais são os objetivos fundamentais do ensino de Álgebra? Há trezentos anos a resposta certamente seria: "o ensino de expressões e equações". No entanto, atualmente, essa resposta já não satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções, bem como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações entre conjuntos.

> E você, o que considera importante para ensinar de Álgebra nos Ciclos de Alfabetização, Interdisciplinar e Autoral? O que é necessário para desenvolver o pensamento algébrico? Reflita sobre isso, faça anotações e continue a leitura do texto.

No pensamento algébrico, a atenção é dada não apenas aos objetos matemáticos em si, mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato. É preciso considerar que esta temática não se reduz apenas ao trabalho com o simbolismo formal, pelo contrário, aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação.

> Retome a leitura do texto sobre o Campo Aditivo, principalmente, o trecho que explica a importância de variar a posição da incógnita nos problemas. É uma possibilidade de iniciação à Álgebra com as crianças.

Podemos dizer que o pensamento algébrico pode ser iniciado nos ciclos iniciais do Ensino Fundamental com a manipulação de adições, produtos e potências de números no que se refere à generalização da aritmética, e, no Ciclo Autoral, o desenvolvimento do pensamento algébrico passa a se ocupar de uma Álgebra que tem por objetivo a compreensão do significado das letras, chamadas de variáveis e de suas operações. Durante muito tempo, acreditou-se que os estudantes passavam a estudar Álgebra quando encontram pela primeira vez as variáveis (USISKIN, 1995).

É preciso levar em consideração também que o pensamento algébrico envolve uma série de representações matemáticas de um mesmo objeto para os estudantes, por exemplo, o estudo de funções, equações, inequações e gráficos, e que a leitura destes objetos do conhecimento deve ser feita “nos dois sentidos”, ou seja, de uma função algébrica educandos devem mobilizar conhecimentos a fim de elaborar seu gráfico, bem como, a partir de um gráfico, serem capazes de construir a função algébrica que o representa. Neste contexto é necessário que professores levem em consideração que, apesar de se tratar de um campo que envolve o pensamento algébrico, existem questões cognitivas distintas envolvidas em relação à leitura dos objetos de conhecimentos.

Ao longo deste texto, discutiremos a construção do pensamento algébrico, bem como algumas concepções que permeiam os processos de ensino e aprendizagem deste eixo do currículo, com o objetivo de gerar reflexões que possam culminar na elaboração de práticas e metodologias para a sala de aula, e que contribuam para o processo de ensino e aprendizagem de álgebra.

Uma reflexão inicial para entender as funções da Álgebra

Para abordagem da Álgebra em sala de aula é preciso realizar uma reflexão acerca do que vem a ser o pensamento algébrico, bem como o que significa a Álgebra nos Ciclos de Alfabetização, Interdisciplinar e Autoral, e o que representa o conceito de variável.

Esta reflexão se faz importante para que a atenção se volte não apenas para o ensino, mas também no reconhecimento das dificuldades dos estudantes no processo de aprendizagem deste eixo da Matemática.

Mas, afinal, o que vem a ser o pensamento algébrico?

Para Blanton e Kaput (2005) o pensamento algébrico é caracterizado como:

> Processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem generalizações através de discurso argumentativo e expressam-se nas formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

Com base na caracterização do pensamento algébrico, segundo os autores, a construção do pensamento algébrico pode ser iniciada também pelo estudo da Aritmética nos Ciclos de Alfabetização e Interdisciplinar, na medida em que se trabalham de forma investigativa os números e suas operações, a partir de casos particulares que podem ser generalizados e expressos de forma adequada com a idade dos estudantes. O pensamento algébrico se ampliará nos anos subsequentes de escolarização (Ciclo Autoral), nos quais os estudantes passam a expressá-lo de forma progressiva, de maneira mais formal.

Seguindo essa mesma linha de pensamento, Kieran (2007) destaca que a Álgebra não se reduz apenas a procedimentos que envolvem símbolos em forma de letras, mas seu grande objetivo é permitir a generalização de relações matemáticas, proporcionando ferramentas variadas para representar a generalização das relações matemáticas, padrões e regras. Dessa forma, a autora salienta que a álgebra passou a ser vista não somente como uma técnica, mas como uma forma de pensamento e raciocínio em relação a situações matemáticas.

Dessa forma, cabe ressaltar que o estudo de Álgebra ainda é associado à manipulação de símbolos e à reprodução de regras operatórias, em que estudantes acabam por operar técnicas, de forma mecânica, sem compreensão, entretanto ele deve considerar uma forma de pensamento própria que leva em conta também as representações de um objeto do conhecimento, usando não apenas a linguagem algébrica convencional, mas também a linguagem natural, tabelas, diagramas e gráficos, ou seja, uma diversidade de representações para comunicar uma ideia algébrica.

É importante salientar que as representações simbólicas são importantes na construção do pensamento algébrico. Canavarro (2007) nos chama a atenção para que, em virtude da imposição da utilização de símbolos e sistemas simbólicos durante anos de escolarização, a Álgebra era vista como o estudo ou uso destes sistemas simbólicos. No entanto, segundo a autora, as questões centrais do pensamento algébrico referem-se aos significados e ao emprego de símbolos como forma de comunicar e/ou representar ideias que resultam de um raciocínio algébrico usado com compreensão. (CANAVARRO, 2007).

> Mas o ensino de Álgebra se reduz apenas à manipulação de símbolos e de sistemas simbólicos? Os sistemas simbólicos da Álgebra servem apenas para comunicar ou representar o pensamento algébrico? Qual é o papel dos símbolos na Álgebra?
>
> Pense sobre isso e continue a leitura do texto.

Devemos considerar ainda que a manipulação simbólica é, sem dúvida, uma parte importante do estudo de Álgebra, porém não se limita a uma única parte, pois o pensamento algébrico diz respeito não somente aos objetos do conhecimento, mas efetivamente às relações que existem entre eles (SILVA JUNIOR, 2016).

Assim, a partir da reflexão sobre o papel dos símbolos na Álgebra, a relação entre eles é fundamental. Esse fato se relaciona a uma questão crucial que é o conceito de uma variável. A este respeito o NCTM (1991) destaca:

> Perceber o conceito de variável é crucial para o estudo da álgebra; um dos grandes problemas do esforço que os alunos fazem para compreender e trabalhar em álgebra resulta de sua limitada interpretação do termo variável. Os alunos só dão início ao domínio do pensamento algébrico quando adquirem a capacidade de perceber e de construir relações entre variáveis (NCTM, 1991, p. 122).

A compreensão limitada do conceito de variável é destacada pelo documento como um dos problemas no processo de ensino e aprendizagem de álgebra, e isso, certamente, nos faz entender como os estudantes aprendem a manipular equações e funções nas aulas de Matemática, porém não conseguem mobilizar seus conhecimentos aprendidos diante, por exemplo, de tarefas de Física, em que se utilizam do mesmo objeto matemático já aprendido. O fato é que suas dificuldades se encontram na compreensão do trabalho com símbolos distintos, quando estes na realidade são as variáveis que envolvem o pensamento algébrico.

Você já observou se os seus estudantes têm dificuldades com relação ao uso de símbolos e com relação à diferenciação entre incógnitas e variáveis? Liste alguns erros que costumam cometer e continue com a leitura do texto.

Em se tratando das variáveis, Ursini et al. (2005) consideram que a compreensão e superação de erros por parte de estudantes em Álgebra estão relacionadas a capacidades básicas, descritas a seguir:

- Realizar cálculos simples operando com variáveis.
- Compreender porque é possível operar com as variáveis e por que estas operações permitem chegar a um resultado, seja numérico ou não.
- Dar-se conta da importância que têm conquistar a capacidade de usar as variáveis para modelar matematicamente situações de diferentes tipos.
- Distinguir os diferentes usos das variáveis em Álgebra.
- Passar com flexibilidade entre os diferentes usos das variáveis.
- Integrar os diferentes usos para vê-los como aspectos distintos de um mesmo objeto matemático, que se revelam dependendo da situação particular (URSINI et al., 2005, p.23).

Para superar os vários erros e dificuldades dos estudantes em relação ao uso das variáveis, é preciso ter clareza do sentido de variável, a compreensão deste conceito e sua utilização em situações algébricas. Consequentemente, o estudante constituirá conhecimentos disponíveis que poderão ser mobilizados em situações futuras, e não somente estar de posse de uma ferramenta de resolução algébrica.

Para Usiskin (1995), o conceito de variável é “multiface”, ou seja, não há uma única concepção para esse conceito. Para essa afirmação, o autor apresenta o exemplo conforme descrito a seguir, em que todas as equações têm o mesmo formato e que podem ser “traduzidas” por: o produto de dois números é igual a um terceiro.

a. $A = b \cdot h$

b. $40 = 50$

c. $\text{sen}\, x = \cos x \cdot \text{tg}\, x$

d. $1 = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$

e. $y = k \cdot x$

Fonte: Usiskin, 1995, p.10

Pense em algumas situações que possam ser representadas por sentenças que se traduzem por: o produto de dois números é igual a um terceiro. Liste essas situações e procure refletir sobre a nomenclatura que se usa comumente em sala de aula para essas sentenças matemáticas.

De acordo com Usiskin (1995), apesar de serem equações de um mesmo formato, elas apresentam caráter diferente. Comumente chamamos 1) de fórmula, 2) de equação, 3) de identidade, 4) de propriedade e 5) de expressão de uma função que traduz uma proporcionalidade direta e não é para ser resolvida. Essa nomenclatura diversa, muitas vezes usada em sala de aula, reflete os diferentes usos dados à ideia de variável.

Em cada uma das sentenças matemáticas apresentadas acima, as letras representam papéis diferentes, conforme Usiskin (1995). Veja só:

- Em 1), as letras A, b e h representam a fórmula do cálculo de área de um retângulo ou paralelogramo, em que A é a área, b e h representam a base e a altura de um retângulo ou paralelogramo e têm o caráter de uma “coisa conhecida”.
- Em 2), tendemos a pensar em uma equação do primeiro grau, e em x como uma incógnita.
- Em 3), tendemos a pensar em uma função, e em x o que se denomina o argumento de uma função.
- Em 4), pensamos em uma equação, ao contrário das outras, generaliza um modelo aritmético, ou seja, o produto de um número por seu inverso é 1, e n indica um exemplo do modelo.
- Em 5), podemos pensar em uma função, e x é mais uma vez o argumento de uma função, y o valor da função e k uma constante ou parâmetro, dependendo de como a letra é usada.

Para Usiskin (1995), apenas em 5) há o caráter de "variabilidade", do qual resulta o termo variável. Mesmo assim, o autor chama atenção para o fato de que se imaginarmos esta equação como a representação analítica de uma reta de inclinação K passando pela origem, o caráter de variável não estará presente.

O que se evidencia, portanto, quando examinamos o significado das letras em cada sentença algébrica analisada, é que, em Álgebra, não há uma única concepção para a variável.

Na Álgebra, é comum o trabalho com letras e assim estudantes compreendem que uma variável é sempre uma letra, e, segundo Usiskin (1995), esta visão é corroborada por muitos professores, uma vez que apresentam, por exemplo, equações sempre com letras, de preferência x ou y :

$$4 + x = 12$$

ou

$$4 + y = 12$$

Os objetivos de aprendizagem do documento de Orientações Curriculares: expectativas de aprendizagem - Matemática (2007) já trabalhavam com os diferentes papéis das variáveis com a finalidade de desenvolver o pensamento algébrico. Neste documento, a álgebra é vista não como uma técnica que trabalha com símbolos e regras apenas, mas que possibilita a construção e compreensão de conceitos, para que possam ser mobilizados em situações que é preciso utilizar a álgebra.

Algumas concepções da Álgebra segundo Usiskin

Existem várias concepções para o ensino de Álgebra, aqui serão abordadas algumas de forma a gerar uma reflexão do papel da Álgebra veiculado no Currículo da Cidade de Matemática (2017). O quadro a seguir apresenta as concepções da Álgebra segundo Usiskin (1995), em que podemos observar que a concepção de Álgebra está ligada ao uso que se faz das variáveis.

Concepção da álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin, 1995, p.20

Segundo Usiskin (1995), a primeira concepção da Álgebra é a Aritmética Generalizada, de acordo com a qual as principais atividades são traduzir e generalizar. As variáveis são usadas como generalizadoras de modelos, a partir de várias situações, por exemplo: 3 + 5 = 5 + 3, 2 + 4 = 4 + 2, etc.; generaliza-se: a + b = b + a, ou seja, generaliza-se uma igualdade, na qual a ordem das parcelas não altera a soma, escrevendo-se a + b = b + a, no conjunto dos Números Naturais

Algumas situações são usadas no cotidiano e os estudantes se apropriam da linguagem algébrica com facilidade, por exemplo:

- o dobro de um número: 2x;
- o triplo de um número: 3x;
- a metade de um número: $\frac{x}{2}$;
- o quadrado da soma de dois números: $(a + b)^2$ etc.

A segunda concepção entende a Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. Alguns tipos de problemas, inclusive, podem ter resoluções aritméticas simples. Enquanto na concepção anterior, as atividades centrais são traduzir e generalizar, nesta as atividades centrais são simplificar e resolver. É o caso de problemas, tais como:

Adicionando 10 ao quádruplo de um certo número, a soma é 70. Qual é esse número?

Nesse caso, os estudantes são conduzidos a traduzir para a linguagem algébrica: 4x + 10 = 70, em que o x é uma incógnita.

Nesta segunda concepção de Álgebra, as variáveis são incógnitas ou constantes. Enquanto as instruções-chave no uso de uma variável como generalizadora de modelos são traduzir e generalizar, na concepção da Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver problemas, as instruções-chave das variáveis são simplificar e resolver.

O documento curricular aborda essa segunda concepção no final do Ciclo Interdisciplinar com situações mais simples e com mais força no Ciclo Autoral.

A terceira concepção da Álgebra para Usiskin (1995) é a que identifica a Álgebra como o estudo de relações entre grandezas. Ela se manifesta pelos estudos de fórmulas, como exemplo, a fórmula $A = b.h$ que fornece a área de uma figura retangular e expressa uma relação entre as três grandezas. A distinção crucial entre esta concepção e a anterior é que, neste caso, as variáveis se modificam de acordo com a situação. Há uma diferença entre estas concepções que é fundamental e isso fica evidente pela resposta que os estudantes geralmente dão à pergunta: O que ocorre com o valor de $\frac{1}{x}$ quando x se torna cada vez maior?

A questão parece simples, mas é suficiente para confundir os estudantes, pois não é solicitado o valor de x, portanto x não é uma incógnita. Também não está sendo pedido ao estudante que traduza. Há um modelo a ser generalizado, mas não se trata de um modelo que se pareça com a aritmética e sim um modelo fundamentalmente algébrico.

No âmbito desta terceira concepção, a Álgebra se ocupa de modelos e leis funcionais que descrevem ou representam as relações entre duas ou mais grandezas variáveis. Uma variável é um argumento (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é, um número do qual dependem outros números).

No Currículo da Cidade, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que focalizam essa terceira concepção estão alocados no Ciclo Autoral.

A quarta concepção segundo Usiskin (1995) é a da Álgebra como estudo das estruturas. Nos cursos superiores, o estudo da Álgebra envolve estruturas como grupos, anéis, domínio de integridade, corpos e espaços vetoriais. Isso parece ter pouca semelhança com a Álgebra da Educação Básica. No entanto, a autora a reconhece como o estudo das estruturas pelas propriedades que se atribui às operações com números reais e polinômios, como na tarefa em que se pede para fatorar: $3x^2 + 4ax - 13a^2$. Não se trata de nenhuma função ou relação; a variável não é um argumento. Não há nenhuma equação a ser resolvida, de modo que a variável não atua como incógnita e, neste caso, também, não há nenhum modelo matemático a ser generalizado.

O que caracteriza a variável na concepção da Álgebra como estudo de estruturas é o fato de ser pouco mais do que um símbolo arbitrário. Isso nos leva a observar que as tarefas conhecidas como de cálculo algébrico, frequentes nas fases do Ciclo Autoral, como produtos notáveis, fatoração, operações com monômios e polinômios, encontram-se no âmbito desta quarta concepção de acordo com Usiskin (1995).

E você, quais dessas concepções você dá mais ênfase quando trabalha com a álgebra? O que pode ser feito para equilibrar melhor o trabalho com essas concepções, principalmente no final do Ciclo Interdisciplinar e no Ciclo Autoral?

Erros e dificuldades dos estudantes em Álgebra

Ponte, Branco e Matos (2008) fazem uma síntese dos erros e dificuldades de estudantes na resolução de equações destacados em várias pesquisas e que podem, em alguns casos, ser estendidos para manipulações de expressões algébricas. Os autores se referem a problemas que podem ocorrer na aprendizagem deste tema, relativos à utilização de símbolos, em especial nas expressões algébricas presentes no trabalho com equações e funções. Segundo as perspectivas dos autores, o raciocínio em álgebra requer a compreensão da linguagem algébrica, sendo por isso de grande importância compreender a natureza e origem das dificuldades dos estudantes. A partir dessa perspectiva os autores propõem a seguinte síntese a seguir.

ERROS S/ DIFICULDADES	EXEMPLO	AUTOR
Adição de termos que não são semelhantes e interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma ação.	$3 + 4n = 7n$ $2a + 5b = 7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1982 Kuchemann, 1981 Mac Gregor e Stacey, 1997
Interpretação incorreta de monômios do 1º grau	Interpretação de 4y como: • quatro "y s"; • um número com quatro dezenas e e um número desconhecido de unidades. • 4 + y por analogia com $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$	Booth, 1984
Uso de parênteses	$3 (x + 2) = 7x \leftrightarrow 3 x + 2 = 7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Plarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeita a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número.		Kieran, 1985
Adição incorreta de termos semelhantes.	$- 2x + 5 = 8 \leftrightarrow - 7x = 8$	Kieran, 2006

Adição incorreta de termos não semelhantes.	$2x + 5 = x + 8 \leftrightarrow -7x = 9$	Kieran, 1985
Transposição incorreta de termos.	$16x - 215 = 265 \leftrightarrow 16x = 265 - 215$ $30 = x + 7 \leftrightarrow 30 + 7 = x$ $3x + 5 = 2x \leftrightarrow 3x = 2x + 5$ $7x = x + 8 \leftrightarrow 7 - 8 = x + x$	Kieran, 1885. 1992
Redistribuição (Redistributon)	$- 2x + 5 = 8 \leftrightarrow 2x + 5 - 5 = 8 + 5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x - 3 = 2x - 4 \leftrightarrow x = 2x - 4$	Kieran, 1992

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2008)

Em relação à síntese apresentada pelos autores sobre os erros e dificuldades mais frequentes na resolução de equações, é possível não só verificarmos que tais erros e dificuldades apresentam um padrão de ocorrência, uma vez que estão presentes em diversas pesquisas, mas que também frequentemente podemos encontrar diversos deles em nossas aulas e nas produções de nossos estudantes.

Com base nessa síntese de Ponte, Branco e Matos (2008), com o objetivo de elucidar algumas situações elencadas por eles, apresentamos alguns registros que retiramos da pesquisa de Siebra[12] (2009), que trabalhou os erros de estudantes de 7° ano (8ª série antiga) em questões que envolvem Álgebra.

Na questão 6, apresentada na sequência da atividade proposta por Siebra (2009) em sua pesquisa, todos os estudantes que erraram assinalaram a alternativa b, que corresponde a 4xy.

6ª questão

A expressão (3x - 2) 4y é equivalente a:

a) 12xy - 2

b) 4xy

c) 12xy - 8y

d) 3xy - 8y

Fonte: Siebra, 2009, p.69-70

12 Maiores detalhes sobre a pesquisas podem ser encontrados em: <https://siaa.cruzeirodosul.edu.br/consulta-dissertativa/secure/wdiscon01/wdiscon01.jsf?_codEmpr=03>

A pesquisadora verificou três tipos de erros distintos: a maioria dos estudantes subtraiu 3x de -2, o que resulta em x, e multiplica por 4y. Não observaram o fato de não poderem operar termos que não são semelhantes. Esta constatação fica clara nos protocolos seguintes.

Mostre como você chegou a sua resposta.

$$(3x-2)4y$$
$$1x.4y$$
$$4xy$$

Fonte: SIEBRA, 2009, p.76

Figura 20 – Protocolo de estudante

Este erro é apontado por vários autores que consideram que os estudantes que cometem esse tipo de erro desconhecem a natureza e o significado das letras.

No próximo exemplo, apesar de o estudante multiplicar os números adequadamente quando usou a propriedade distributiva, ao que parece não atribui significado às letras, usando x e y de forma inadequada, talvez pelo que Booth (1984) relaciona com os significados diferenciados de uma letra na aritmética e na álgebra.

Mostre como você chegou a sua resposta.

$$(3x-4)4x$$
$$12xy-16x$$
$$4xy$$

Eu cheguei a essa resposta resolvendo a expressão. Veja em cima

Fonte: SIEBRA, 2009, p.77

Figura 21 – Protocolo de estudante

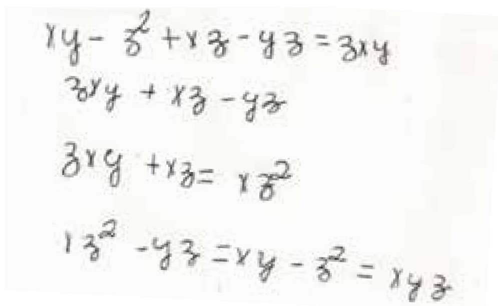
No próximo protocolo é possível observar que o estudante também desenvolve a propriedade distributiva de maneira correta, porém apresenta erro quando faz a subtração 12xy – 8y. Quando ele faz 12xy – 8y = 4xy, comete o erro denominado por Kieran (2008) de operação inadequada com termos não semelhantes, ou o que Booth (1995) associa a natureza das respostas, ou seja, a não aceitação de uma expressão como resposta. Esse erro pode ter origem na aritmética, pois nela a resposta é um número e não uma expressão.

Uma das questões que apresentou menor índice de acertos na pesquisa de Siebra (2009) foi a questão abaixo, que envolvia a fatoração de um polinômio por agrupamento.

> Dentre os polinômios abaixo, o único equivalente a $xy - z^2 + xz - yz$ é:
>
> a) $(x - z)(y + z)$
>
> b) $x(x - y) + z(x - y)$
>
> c) $x(y - z) - z(z - y)$
>
> d) $xy - z(z + x - z)$

Fonte: SIEBRA, 2009, p.70

Para esta questão, podemos encontrar um caso de adição de termos que não são semelhantes, que estão dentro dos estudos de Booth (1995), Kieran (1992), em que o estudante se apropria do sinal de igual para indicar uma ação, como no protocolo apresentado na figura 22.

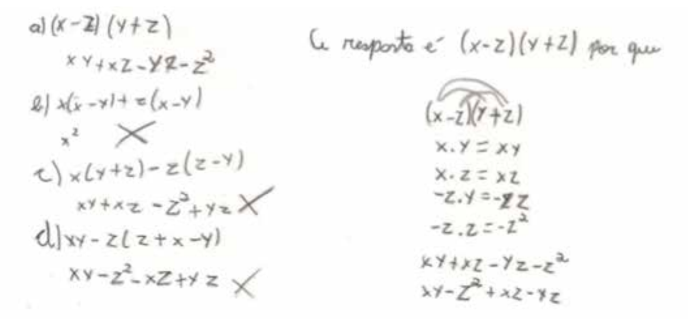
> Mostre como você chegou a sua resposta.
>
> 
>

Fonte: SIEBRA, 2009, p.78

Figura 22 – Protocolo de estudante

Também para esta questão é possível observar que os estudantes usaram o procedimento inverso, resolvendo cada produto apresentado como alternativa, dando indicadores de que não conseguem fatorar. No entanto parece que eles identificam que a fatoração de um polinômio é equivalente a um produto, como indicado nos protocolos a seguir, em que testaram a alternativa a e encontraram a resposta.

Mostre como você chegou a sua resposta.

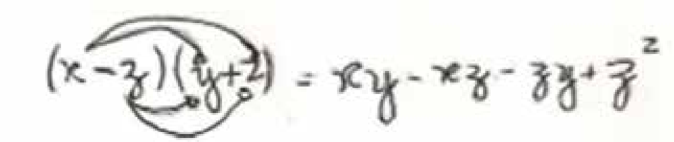


Fonte: SIEBRA, 2009, p.85

Figura 23 – Protocolo de estudante

Foram observados por Siebra (2009) erros na multiplicação de números positivos por negativos, embora o uso da propriedade distributiva estivesse correto.

Mostre como você chegou a sua resposta.



Fonte: SIEBRA, 2009, p.85

Figura 24 – Protocolo de estudante

O protocolo a seguir mostra que o estudante manipulou todas as alternativas, mas não conseguiu chegar à resposta correta. O que para Siebra (2009) significa que ele não identifica que é $xy + xz - zy - z^2$ é igual a $xy - z^2 + xz - yz$.

Mostre como você chegou a sua resposta.

a) $(x-z)(y+z) = xy - z^2 + xz - yz$

b) $x(x-y) + z\cdot(x-y) = x^2 + xy + zx - zy$

c) $x\cdot(y+z) - (z-y) = xy + xz + z^2 + zy$

d) $xy - z(z + x - y) = xy - z^2 + zx - zy$

Fonte: SIEBRA, 2009, p.86

Figura 24 – Protocolo de estudante

Estes são alguns exemplos de erros cometidos no estudo de Álgebra, que se encontram categorizados em algumas pesquisas e têm sido motivo de estudo para pesquisadores e educadores com o objetivo de entender e melhorar os processos de ensino e aprendizagem em se tratando da álgebra ensinada na educação básica.

Ao longo deste texto, apresentamos, de forma sintética, questões relacionadas à construção do pensamento algébrico, bem como reflexões sobre o conceito de variável e o papel que elas desempenham nas diferentes concepções que a Álgebra pode apresentar.

Certamente, há de se considerar que estas indagações relacionadas às questões da construção do pensamento algébrico, assim como um trabalho efetivo em termos de variáveis, exige de nós, professores, maior entendimento sobre todo um contexto em que se dá o estudo da álgebra.

Referências

VOLUME I e II

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica**: reflexão participativa sobre os currículos do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, 1999.

ALSINA, C.; BURGUÊS, C.; FORTUNY, J. **Invitacion a la didáctica de la geometria**. Madrid: Sínteses, 1987.

ASSIS NETO, F. R. Menos vezes menos dá mais: observações históricas sobre o conceito de número negativo. **Revista de Educação Matemática e Tecnologia Ibero-Americana**, v. 2, n. 1, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/issue/view/ 2273/1835>. Acesso em: 27 maio 2017.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAKOS, M. M. (Org.). O imperador na terra dos faraós. **Nossa História**, São Paulo, v. 2, n. 15, jan. 2005.

BATISTA, F. S. **Um estudo sobre área de triângulos e polígonos convexos e não-convexos**. 2014. 106 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática)–Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: Information Age, 2007. p. 843-908.

BAYER, A.; ECHEVESTE, S.; ROCHA, J.; BITTENCOURT, H.R. Probabilidade na escola. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2005, Canoas. v. I, p.1-12. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/265449108_PROBABILIDADE_NA_ESCOLA> .Acesso em: 3 dez. 2017.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of mathematical concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Natal: SBHMAT, 2002.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal of Research in Mathematics Education**, Las Vegas, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BLANTON, M. **Algebra and the elementary classroom**. Portsmouth: Heinemann, 2008.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. SALVADOR, 10., 2010, Salvador. **Anais**...Salvador, 2010.

BOROVCNIK, M. Research and development in the teaching and learning of probability. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICAL EDUCATION, 11., 2008, Monterrey, Mexico. Disponível em: < https://iase-web.org/documents/papers/icme11/ICME11_TSG13_reportafterconference.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2017.

BOUTINET, Jean-Pierre. **A antropologia do projeto**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEB, 2012.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Diretrizes curriculares nacionais gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base: terceira versão. Brasília: MEC, 2017.

BRITO, A. F; BELLEMAIN, P. M. B. Influência do uso de materiais manipulativos na construção da grandeza comprimento. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Brasília SBEM, 2004. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/01/CC00073428450.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2017.

BROLEZZI, A. C. Discreto e contínuo: explorando uma tensão na história e no ensino de matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2000, Serra Negra. **Anais**... Brasília: SBEM, 2000.

BRUNO, A. C. La ensenãnza de los números negativos: aportacione de una investigación. **Revista de didática de la Matemática**, Universidade de La Laguna, San Cristóbal de La Laguna Santa Cruz de Tenerife, n. 29, p. 5-18, Marzo 1997.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. 8, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARPENTER et al. Algebra in the elementary school: Developing relational thinking. **ZDM** : The International Journal on Mathematics Education, Springer Berlin Heidelberg, v. 37, n. 1, p. 53-59, 2005.

CARRETONI, M. L. Z.; GAZZETTA, M. (Coord.). **Iniciação à Matemática**: 1º e 2º grau. Campinas: UNICAMP, 1986.

CENTURIÓN, M. R. **Porta Aberta**: Matemática. São Paulo: FTD, 2011.

CHAPIN, S. H.; JOHSOM, A. **Math matters**. Sausalito, CA, USA: Math Solutions, 2006.

CHIUMMO, A. **O conceito de áreas de figuras planas**: capacitação para professores do ensino fundamental. 1998. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

CID, E. **La investigación didáctica sobre los números negativos**: estado de la cuestión. Pre-publicaciones del seminario matemático García de Galeano 2003, n. 25, Universidad de Zaragoza. Disponível em: <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25>. Acesso em: 10 ago. 2017.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Young children's ideas about geometric shapes**. 2000. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/258933238_Young_children's_ideas_about_geometric_shapes>. Acesso em: 3 dez. 2017.

CONTI, K. C. **O papel da estatística na inclusão de alunos da Educação de Jovens e Adultos em atividades letradas**. Dissertação (Mestrado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

CORBALÁN, F. **Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato**. Madrid: Síntesis, 1996.

COUTINHO, C. **Introdução ao conceito de probabilidade pela visão frequentista**: estudo epistemológico e didático. 1994. 151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

CURCIO, F.R. **Developing graphics comprehension**: elementary and middle school activities. Reston, VA: NCTM, 1987.

CURI, E. Contextualização, resolução de problemas e educação Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. VIII ENEM. São Paulo: SBEM, 2004.

______. O currículo prescrito e avaliado pelo SAEB no que se refere ao tema relações espaciais: algumas reflexões. In: CURI, E. ; VECE, J. P. (Org.). **Relações espaciais**: práticas educativas de professores que ensinam Matemática. São Paulo: Terracota, 2013. p.21-45.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **O uso da calculadora**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), junho 2003.

______. **Educação Matemática**: da teoria à prática. São Paulo: Papirus, 2017.

DANTE, L. R. **Alfabetização Matemática**. São Paulo: Ática, 2011. (Ápis)

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères**, IREM, Paris VII, n. 6, p. 132-158, janv. 1992.

______, PERRIN-GLORIAN, M.J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de superface plane. **Educational studies in Matematics**, v. 20, n. 4, p. 387-424,1989.

FACCO, S. R. **Conceito de área uma proposta de ensino-aprendizagem**. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Matemática**: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

FAZENDA, I. C. A. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro**: efetividade ou ideologia. São Paulo: Loyola, 1979.

______. Interdisciplinaridade e transdisciplinaridade na formação de professores. **Revista do Centro de Educação e Letras UNOESTE**, Centro de Foz do Iguaçu, v. 10, n.1, p. 93- 103, 1º semestre 2008. Disponível em: <http://e-revista.unioeste.br/index.php/ideacao/article/view/4146/3191>. Acesso em: 7 nov. 2017.

FERNANDES, J. A.; MORAIS, P. C. Leitura e Interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 13, n. 1, 2011.

FOSNOT, C. E DOLK, M. **Young mathematicians at work**: constructing multiplication and division. Portsmouth, N. H. Heineman, 2001.

FRÍAS, A.; GIL, F.; MORENO, M. F. Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitude, tiempo. In: CASTRO, E. **Didáctica de la matemática em la Educación Primaria**. Madrid: Síntesis, 2008.

GALVEZ, G. A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: ARTMED, 1996.

GARDING, L. **Encontro com a matemática**. Tradução de Célia W. Alvarenga e Maria Manuela V. Marques Alvarenga. Brasília: Editora da UnB, 1997.

GLAESER, G. Epistemologia dos números relativos. Tradução Lauro Tinoco. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 17, p. 29-124, 1985.

GRANDO, R. C. Jogos computacionais e a educação Matemática: contribuições das pesquisas e das práticas pedagógicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador, 2010.

______. Recursos didáticos no ensino de Matemática: jogos e materiais manipulativos. In: ENCONTRO CAPIXABA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2015, Vitória. **Anais**... Vitória, 2015.

HALL, R. **An analysis of errors made in the solution of simple linear equations**. 2002. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/44ed/4f503982219318fdd57982f324a781411272.pdf>. Acesso em: 8 ago. 2017.

HALL, Richard DG. An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. **Philosophy of mathematics education journal**, n. 15, p.70-79, 2002.

HAYDT, R. C. C. **Curso de didática geral**. São Paulo: Ática, 2002.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**: 5ª série. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Ed.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum,1999. p. 133-155.

______. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J. ; CARRAHER, D. ; BLANTON, M. (Ed.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum, 2008. p.5-17

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, v. 16, n. 1, p. 5-26, 2007.

______. Overall commentary on early algebraization: perspectives for research and teaching. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Ed.). **Early algebraization**. Berlin: Springer, 2011. p. 579-593.

______. The learning and teaching of school algebra. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, NY: MacMillan, 1992. p. 390-419.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.). **Number and measurement**: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC / SMEAC, 1976. p. 101-144.

LERNER, D. É possível ler na escola?. In: BRASIL. Ministério da Educação. **Programa de Formação de Professores Alfabetizadores**: módulo 2. Brasília: MEC, 2001.

LERNER, D., SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 73-155.

LOPES, C. E. O ensino de estatística e da probabilidade na educação básica e a formação de professores. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 27, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008.

LUQUET, G. H. **Les dessins d'um enfant**. Paris: Félix Alcan, 1927.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 7. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

MANDARINO, M. C. F. Que conteúdos da matemática escolar professores dos anos iniciais do ensino fundamental priorizam?. In: GUIMARÃES, G.; BORBA, R. (Org.). **Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização**. Recife: SBEM, 2009. (Coleção SBEM, v. 6)

MARIANO, S.F.S. **Aprendizagens de crianças de terceiro ano do ensino fundamental no que se refere à construção do espaço, suas relações e representações**. 2015. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)–Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015.

MARTINS, P. B.; NASCIMENTO, J. C. P. **O trabalho com o tratamento da informação no 2° ano do Ensino Fundamental**: uma experiência em sala de aula com a construção de tabelas e gráficos. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5715_3555_ID.pdf >. Acesso em: 20 maio 2017.

MATEMÁTICA ESSENCIAL: Ensino Fundamental: Geometria: polígonos e triângulos. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/fundam/geometria/poligonos.htm>. Acesso em: 10 set. 2017.

MELO, M. A. P. **Um estudo de conhecimentos de alunos de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro**. 2003. 125f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências)-UFRPE, Recife, 2003.

MENEZES, L. **Processos Matemáticos na sala de aula**: resolução de problemas e comunicação. Programa de formação continuada para professores do 1° e 2° ciclos. 2007. Disponível em: <https://www.google.com.br/search?q=processos+matem%C3%A1ticos+na+sala+de+aula+%2B+menezes&oq=processos+matem% C3%A1ticos+na+sala+de+aula+%2B+menezes&gs_l=psy-ab.3...13819.20027.0.20426.13.13. 0.0.0.0.322.2331.2-6j2.8.0....0...1.1.64.psy-ab..5.7.2067...35i39k1j33i22i29i30k1j33i160k1.0.eSiDrcp3vts.> Acesso em: 3 dez. 2017.

MOLINA, M. Integración del Pensamiento Algebraico en la Educación Básica. Un Experimento de Enseñanza con Alumnos de 8-9 Anõs. In: MARTINHO, M. H.; FERREIRA, R. A.; VALE, I.;, PONTE,

J. P. (Ed.). **Ensino e aprendizagem da Álgebra**. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (p. 27-51). Lisboa: EIEM, 2011.

MORAIS, M. D.; TELES, R.A.M. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. In: UNESCO. **Educação para os objetivos de desenvolvimento sustentável**: objetivos de aprendizagem. Brasília: UNESCO, 2017. 62 p. Disponível em: <http://cdnbi.tvescola.org.br/resources/VMSResources/contents/document/publicationsSeries/16532008_14_MedidaseGrandezasnociclodaalfabetizacao.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2017.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n.1, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2014.

MOURA, A. R. L. **A medida e a criança pré-escolar**. 1995. 210 f. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino de Matemática)-UNICAMP, Campinas, 1995.

MUNIZ, C. A.; BATISTA, C. O.; SILVA, E. B. **Matemática e cultura**: decimais, medidas e sistema monetário: módulo IV. Brasília: Universidade de Brasília, 2008. 109 p.

NASSER, L. Níveis de van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria?. **Boletim GEPEM**, n. 29, p. 31-35, 1991.

NERY, A. Modalidades organizativas do trabalho pedagógico: uma possibilidade. In: BRASIL. Ministério da Educação. **Ensino Fundamental de nove anos**: orientações para a inclusão das crianças de seis anos de idade. Brasília: MEC, 2007.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. **Normas profissionais para o ensino de Matemática** (trad. APM). Lisboa: Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991/1994.

OCHI, F. H.; PAULO R. M.; UOKOYA, J. H.; IKEGAMI, J. K. **O uso de quadriculados no Ensino da Geometria**. São Paulo: IME/USP, 1997.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 53-92.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, Campinas, Unicamp, São Paulo, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul./dez. 1996.

PANIZZA, M. **Ensinar Matemática na Educação Infantil e séries iniciais**: análise e propostas. Porto Alegre, RS: Artmed, 2006. p. 143- 166.

PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

PARZYSZ, B. Representation of space and student's conceptions at high school level. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 22, n. 6, p. 575-593, 1991.

PARZYSZ, B. Knowing vs seeing: problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l' enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, n.17, p. 128-151, 2006.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, Unicamp, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

______. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PEDRO, L. F.; MOREIRA, A. Os hipertextos de flexibilidade cognitiva e a planificação de conteúdos didácticos: um estudo com (futuros) professores de Línguas. **Revista de Enseñanza y Tecnología**, p.29-35, sept.- dic., 2000,

PEREIRA, F. F.; CURI, E. Resolução de problemas do campo aditivo: um olhar qualitativo nos dados quantitativos. **Anais do Encontro de Produção Discente em Ensino de Ciências e Matemática PUCSP / Cruzeiro do Sul**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 1-9, 2012.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1° a 4° série. **Zetetiké**, Campinas, v.7, jan./jun. 2009.

PIAGET, J; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre, RS: Artmed, 1993.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. Florianópolis: EAD / UFSC / CED / CFM, 2010. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2017.

PIRES, C. M. C. **Transformando a prática das aulas de matemática**: textos preliminares. São Paulo: PROEM, 2001.

______. Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil. **Revista Bolema**, Rio Claro, São Paulo, ano 21, n. 29, p. 13-42, 2008. Disponível em: <http://www.redalyc.org/html/2912/291221870003/> Acesso em: 7 nov. 2017.

______.:CURI, E.; CAMPOS, T. M. **Espaço e forma**: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries do ensino fundamental. 2. ed. São Paulo: PROEM, 2001.

______. **Educação Matemática**: conversa com os professores dos anos iniciais. São Paulo: Zapt, 2012.

______. **Números naturais e operações**. São Paulo: Melhoramentos, 2013.

PONCE, H. **Enseñary aprender matemática**: propuestas para el segundo ciclo. Buenos Aires: Centro de Publicaciones educativas y Material Didáctico, 2004.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, v. 19, n. 25, p.105-132, 2006.

______. ; SERRAZINA, L. **Didáctica da Matemática do 1° Ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

______.; BRANCO, N.; MATOS, A. O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, n. 100, p. 89-96, nov./dez. 2008.

ROBERT, Aline. Outils d’analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l’université. **Recherches en Didatique des Mathématiques**, v. 18, n. 2, p. 139-190, 1998.

ROSSI, R. U. M. **Reflexões sobre o ensino dos números inteiros**: uma análise de livros didáticos de matemática do ensino fundamental. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2009.

SAIZ, I. E. A direita...de quem? Localização espacial na Educação Infantil e séries iniciais. In: PANIZA, M. et al. **Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais**: análise e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SALVADOR, C. M. A; NACARATO, A. M. Sentidos atribuídos ao zero por alunos da 6ª série. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 26, 2003, Poços de Caldas. **Anais**... Poços de Caldas: ANPED, 2003. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_26/sentidos.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2017.

SANTOS, C. A. B. **Formação de professores de matemática: contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro**. 2008. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2008a.

______.; CURI, E. O estudo das noções de área e perímetro considerando os níveis de conhecimento esperado dos educandos como ferramenta didática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Brasília: SBEM, 2010.

SANTOS, M. R. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo**: um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas. 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências)–Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco, 2005. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/bitstream/tede2/5929/2/Marilene%20Rosa%20dos%20Santos.pdf >. Acesso em: 12 fev. 2008.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e tecnologias. São Paulo: SE, 2008.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Currículo da cidade**: Ensino Fundamental: Matemática. São Paulo: SME/COPED, 2017.

______.Secretaria Municipal de Educação. **Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem para o ensino fundamental**: ciclo I: Matemática. São Paulo: SME/DOT, 2007.

______. Secretaria Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica. **Cadernos de Apoio e Aprendizagem**: Matemática: livro do professor. São Paulo: SME/DOT, 2010.

SCHÖN, D. A. **La formación de profesionales reflexivos**: hacia un nuevo disefio de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona: Paidós, 1992.

______. **Educando o profissional reflexivo**: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

SEQUERRA, M. L.; MARINCEK, V. (Org.). **Aprender matemática resolvendo problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SERINO, A. P. **Uma abordagem inclusiva para transformações geométricas**: o caso de alunos cegos. 2011. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-UNIBAN, São Paulo, 2011.

SIEBRA, M. J. **Dificuldades e erros de alunos de 8ª série com relação a questões que envolvem álgebra**. 2009. 99 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2009.

SILVA JUNIOR, F. M. **Pensamento algébrico**: indícios de um currículo enculturador. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SILVA, E. B. Comprimento, superfície e volume na medida certa. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Brasília: SBEM, 2007

SILVA, M. A; PIRES, C. M. C. **Organização da Matemática no Ensino Médio**: a recursão como critério. Ciências e Educação, Bauru, v. 19, n. 2, p. 249-266, 2013.

SMOLE, K. S.; ISHIHARA, C. A.; CHICA, C. R. **Usar ou não a calculadora na aula de matemática?** Disponível em: <http://www.mathema.com.br/mathema/resp/calculadora.html>. Acesso em: 7 abr. 2009.

SPIRO, R.; COULSON, R.; FELTOVICH, P.; ANDERSON, D. Cognitive flexibility theory: advanced knowledge acquisition in ill-structured domains. In: PATEL, V. (Ed.). **Tenth annual conference of the cognitive science society**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1998.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalizing problems. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 2, p. 147-164, 1989.

STREEFLAND, L. **Fractions in realistic mathematics education**: a paradigm of developmental research. Dordrecht: Springer, 1991.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2010.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória dos números inteiros: obstáculos e dificuldades. **Pró-Posições**, Faculdade de Educação da Unicamp, Campinas, v. 4, n. 1, mar. 1993.

TREFFERS, A.; BUYS, K. Grade 2 and 3: calculation up to 100. In: Panhuizen, M. H. **Children learn mathematics**. Netherlands: Frendenthal Institute, 2001. p. 61-88.

TV ESCOLA. Salto para o futuro. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. **Boletim 8**, Brasília: MEC, ano 24, set. 2014.

UNESCO. **Educação para os objetivos de desenvolvimento sustentável**: objetivos de aprendizagem. Brasília: UNESCO, 2017. 62 p.

URSINI, S.; ESCARENO, F.; MONTES, D.; TRIGUEIROS, M. **Ensenanza del álgebra elemental**: una propuesta alternativa. Mexico: Trillas, 2005.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

UTIMURA, G. Z.; CURI. E. **Figuras geométricas espaciais**: alunos de 5° ano e suas professoras aprendendo juntos. São Paulo: Appris, 2016.

VALE, I. Das tarefas com padrões visuais à generalização. In: FERNANDES, J. ; MARTINHO, H. ;

VISEU, F. (Org.). **Actas do XX Seminário de Investigação Matemática**. Viana do Castelo: APM, 2009. p. 35-63.

VAN HIELE, P. M. Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. In: TALL, D. O.; THOMAS, M.; SKEMP, Richard R. **Intelligence, learning and understanding in mathematics**: a tribute to Richard Skemp. Flaxton: Post Pressed, 2002.

VECE, J. P. Alunos do 1° ano do ensino fundamental e os problemas de transformação negativa. In: CURI, E.; NASCIMENTO, J. C. P. **Educação Matemática**: grupos colaborativos, mitos e práticas. São Paulo: Terracota, 2012.

______. **Grandezas e medidas**. Texto produzido para a formação de professores dos anos iniciais. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2017.

______.; SILVA, S. D.; CURI, E. Desatando os nós do Sistema de Numeração Decimal: investigações sobre o processo de aprendizagem dos alunos do 5° ano do Ensino Fundamental a partir de questões do SAEB / Prova Brasil. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 1, p. 223-240, 2013.

______.; CURI, E. Representação gráfica do espaço de alunos do 1° ano ao 5° ano do Ensino Fundamental: por que, o que e como analisar?. **Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)**, v. 9, n. 21, 2016. Disponível em: <http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/arte/view/2201/2271>. Acesso em: 3 dez. 2017.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Ed.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

______. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad. Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 2009.

______. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. (Dir.). **Didácticas das MATEMÁTICAS**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ZARAN, M. L. O. **Uma análise dos procedimentos de resolução de alunos de 5° ano do ensino fundamental em relação à problemas de estruturas multiplicativas**. 2013. 172 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2013.

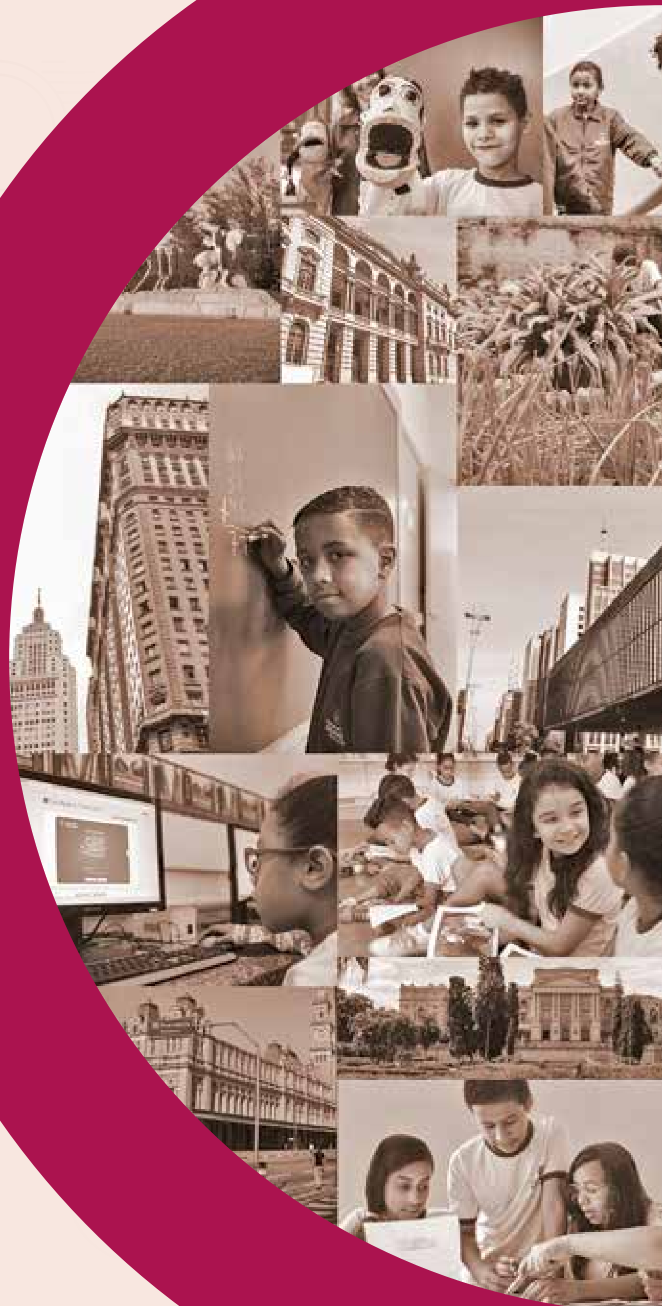
______.; SANTOS, C. A. B. Uma análise sobre aprendizagens e dificuldades reveladas por alunos do 5° ano na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. In: CURI, E.; NASCIMENTO, J. C. (Org.). **Educação Matemática**: grupos colaborativos, mitos e práticas. São Paulo: Terracota, 2012.

ZUNINO, Delia Lerner. **A Matemática na escola**: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

Consulte as obras disponíveis na Biblioteca Pedagógica
da Secretaria Municipal de Educação.

portal.sme.prefeitura.sp.gov.br/biblioteca-pedagogica
e-mail: smecopedbiblioteca@sme.prefeitura.sp.gov.br
Telefone: 55 11 3396-0500

CURRÍCULO
da CIDADE



NON DVCOR DVCO

PREFEITURA DE
SÃO PAULO
EDUCAÇÃO