Secretaria Municipal de Educação de São Paulo

Orientações Didáticas
do Currículo da Cidade

Volume 2

ENSINO FUNDAMENTAL **Matemática**

PREFEITURA DE SÃO PAULO
EDUCAÇÃO

Prefeitura da Cidade de São Paulo
Bruno Covas
Prefeito

Secretaria Municipal de Educação
Alexandre Schneider
Secretário Municipal de Educação

Daniel Funcia de Bonis
Secretário Adjunto

Fatima Elisabete Pereira Thimoteo
Chefe de Gabinete

Secretaria Municipal de Educação de São Paulo

Orientações Didáticas do Currículo da Cidade

Matemática

volume 2

São Paulo | 2019

PREFEITURA DE SÃO PAULO
EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA - COPED

Minéa Paschoaleto Fratelli - Coordenadora

ASSESSORIA TÉCNICA - COPED
Fernanda Regina de Araujo Pedroso
Tânia Nardi de Pádua

DIVISÃO DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO – DIEFEM

Carla da Silva Francisco - Diretora

EQUIPE TÉCNICA – DIEFEM
Cíntia Anselmo dos Santos
Daniela Harumi Hikawa
Daniella de Castro Marino Rubio
Felipe de Souza Costa
Heloísa Maria de Morais Giannichi
Hugo Luís de Menezes Montenegro
Humberto Luis de Jesus
Karla de Oliveira Queiroz
Kátia Gisele Turollo do Nascimento
Lenir Morgado da Silva
Paula Giampietri Franco
Rosangela Ferreira de Souza Queiroz
Yara Dias da Silva

NÚCLEO TÉCNICO DE CURRÍCULO – NTC

Wagner Barbosa de Lima Palanch - Diretor

EQUIPE TÉCNICA – NTC
Adriana Carvalho da Silva
Carlos Alberto Mendes de Lima
Claudia Abrahão Hamada
Clodoaldo Gomes Alencar Junior
Edileusa Andrade de Carvalho Araújo Costa
Márcia Andréa Bonifácio da Costa Oliveira
Maria Selma Oliveira Maia
Mariângela do Nascimento Akepeu
Monica de Fátima Laratta Vasconcelos
Nágila Euclides da Silva Polido
Regina Célia Fortuna Broti Gavassa
Silvio Luiz Caetano
Tânia Tadeu
Vera Lúcia Benedito
Viviane Aparecida Costa

EQUIPE DE COORDENAÇÃO E ELABORAÇÃO
COORDENAÇÃO GERAL
Carla da Silva Francisco
Wagner Barbosa de Lima Palanch
Minéa Paschoaleto Fratelli

ASSESSORIA PEDAGÓGICA GERAL
Fernando José de Almeida

CONCEPÇÃO E ELABORAÇÃO DE TEXTOS MATEMÁTICA

ASSESSORIA
Edda Curi
Suzete de Souza Borelli

EQUIPE TÉCNICA - SME
José Roberto de Campos Lima
Lineia Ruiz Trivilin
Susan Quiles Quisbert
Débora Reis Pacheco - Assessoria de Formação de Professores

AUTORES DOS TEXTOS
Celia Maria Carolino Pires (in memoriam), Cintia Ap. Bento dos Santos, Claudia Alves de Castro, Edda Curi, Eliane Matheus Plaza, Ivan Cruz Rodrigues, Janaina Pinheiro Vece, Julia de Cassia Pereira Nascimento, Linéia Ruiz Trivilim, Priscila Bernardo Martins, Simone Dias da Silva, Solange de Fátima Soares Mariano, Susan Quiles Quisbert, Suzete de Souza Borelli.

REVISÃO TEXTUAL
Felipe de Souza Costa

PROJETO EDITORIAL

CENTRO DE MULTIMEIOS
Magaly Ivanov - Coordenadora

NÚCLEO DE CRIAÇÃO E ARTE - Editoração e Ilustração
Ana Rita da Costa - Projeto gráfico
Angélica Dadario
Cassiana Paula Cominato
Fernanda Gomes Pacelli
Joseane Alves Ferreira

Pesquisa Iconográfica
Eliete Caminhoto

Fotos Capa
Daniel Arroyo da Cunha
Enzo Maia Boffa
Magaly Ivanov
Paula Letícia de Oliveira Floriano

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

São Paulo (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica.

Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática – volume 2. – 2.ed. – São Paulo : SME / COPED, 2019.

144p. : il.

Bibliografia

1.Educação – Currículo. 2.Ensino Fundamental. 3.Matemática – Orientação didática. I.Título.

CDD 375.001

Código da Memória Técnica: SME172/2018
Elaborado por Patrícia Martins da Silva Rede – CRB-8/5877

Disponível também em: <http://portalsme.prefeitura.sp.gov.br>

Consulte o acervo fotográfico disponível no Memorial da Educação Municipal da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo.
portal.sme.prefeitura.sp.gov.br/Memorial-da-Educacao-Municipal
Tel.: 11 5080-7301 e-mail: smecopedmemorialeducacao@sme.prefeitura.sp.gov.br

Educadores e Educadoras,

Dando continuidade ao processo de implementação do Currículo da Cidade, estas Orientações Didáticas constituem-se como mais um desdobramento de toda a discussão e proposição de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento. Nesse sentido, este documento apresenta possibilidades de trabalhos com esses objetivos sem, no entanto, limitar o poder criativo de cada professora e professor em nossa Rede.

As Orientações Didáticas não foram pensadas de modo complementar ao Currículo da Cidade, mas constituintes desse documento, que abarca diversos saberes e que tem, como principal finalidade, garantir a aprendizagem de estudantes no Município de São Paulo.

Para tanto, não perdemos de vista os princípios que visam à garantia da: equidade, colaboração, continuidade, relevância, contemporaneidade, educação integral e, como não poderia deixar de ser, da educação inclusiva, que pressupõe o respeito e a valorização da diversidade, a qual nos constitui como sujeitos e cidadãos de uma cidade multifacetada.

Assim, os documentos orientadores fazem parte de uma coleção que comporá a formação continuada de profissionais da Rede Municipal de Ensino de São Paulo, à medida que apresenta discussões importantes para que os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento ganhem vida e passem a ser uma realidade possível na ação docente.

É importante dizer que, nas páginas das Orientações Didáticas, o professor e a professora encontrarão pontos de partida e sugestões de trabalho, mas não “receitas”, pois entendemos que – numa cidade tão complexa como a nossa – as realidades locais são levadas em consideração. Nosso esforço está centrado no sentido de empreender estratégias e na proposição de possibilidades para que estudantes da cidade continuem aprendendo.

Por falar em aprendizagem, o foco maior de nossas ações, organizamos a coleção de Orientações Didáticas por área e por componente curricular: Linguagens (Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa), Matemática, Ciências da Natureza (Ciências Naturais) e Ciências Humanas (Geografia e História), Tecnologia para Aprendizagem. Cada volume compreende discussões orientadoras do 1º ao 9º ano. A novidade, desta vez, é que há um documento especialmente elaborado para a Coordenadora e o Coordenador Pedagógico.

Para além dessa organização, foram pensados aspectos que entrecruzam todos os componentes curriculares, ou seja, que visam à Matriz de Saberes. Portanto, propomos orientações que considerem: o pensamento científico, crítico e a criatividade; a resolução de problemas; a comunicação; o autoconhecimento e o cuidado; a autonomia e a determinação; a abertura à diversidade; a responsabilidade e a participação; a empatia e colaboração e o repertório cultural.

Finalmente, nosso desejo é que as Orientações Didáticas fortaleçam os Projetos Político-Pedagógicos, redimensionem olhares para discussões mundiais, como os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, e que, sobretudo, continuem a garantir a aprendizagem de estudantes.

Bom trabalho!

Alexandre Schneider

Secretário Municipal de Educação

Matriz de Saberes

Saber mais

Com a palavra

Sumário

Apresentação

O objetivo deste documento é apresentar algumas reflexões, discussões e sugestões com base em pesquisas que focalizam o ensino e a aprendizagem em Matemática com a finalidade de subsidiar os professores que ensinam Matemática na Rede Pública Municipal em sua prática de sala de aula. Partimos do princípio de que os estudos e pesquisas de Educadores Matemáticos que visam à melhoria do ensino e da aprendizagem da área podem proporcionar práticas mais consistentes, que efetivamente possam produzir melhores resultados nas aprendizagens dos estudantes.

Essas discussões se fazem necessárias, pois subsidiam a implementação do Currículo da Cidade. Esse Currículo possibilita um trabalho inovador em sala de aula, mas, ao mesmo tempo, traz muitos desafios aos professores. Essa proposta apresenta textos de orientação didática para cada Eixo Estruturante, além de discussões a respeito da gestão de sala de aula, de jogos e brincadeiras, de processos matemáticos e das conexões extramatemática, possibilitando uma articulação entre os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento e as práticas de sala de aula.

Cabe destacar que os textos deste documento apresentam momentos de reflexão para os professores e, com esse tipo de abrangência, podem subsidiar a Jornada Especial Integral de Formação - JEIF, as horas-atividade dos professores e reuniões pedagógicas. Esses textos podem ser escolhidos pelo Coordenador Pedagógico ou pelos próprios professores, de acordo com o Eixo de interesse ou com o tipo de formação do professor (polivalente ou especialista). Também podem ser lidos e trabalhados por professores de todo o Ensino Fundamental. Os coordenadores devem propor aos professores leituras e reflexões interdisciplinares, o que, certamente, contribuirá para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática e das demais áreas do conhecimento.

O Caderno de Orientações Didáticas de Matemática foi dividido em duas Partes. Na Parte I, o documento explora a gestão da sala de aula, momento importante da prática do professor, que precisa selecionar o que vai ensinar; fazer um diagnóstico da turma para compreender o que os estudantes já sabem e o ponto de partida para seu trabalho; organizar a classe; definir estratégias de ensino; explorar diferentes representações matemáticas; pensar nas intervenções e na avaliação. Além disso, nessa parte do documento, há um texto que explora as conexões extramatemática e que possibilita o desenvolvimento de projetos interdisciplinares que são propostos no Currículo da Cidade de Matemática com foco nos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável - ODS.

No **Eixo Números**, tradicionalmente mais focalizado na prática dos professores, o destaque dos textos é para os campos numéricos e para a resolução de problemas. Os textos envolvem o estudo das operações com números naturais, racionais e inteiros, além dos diferentes tipos de cálculo (exato, aproximado, usando procedimentos de cálculo mental, escrito e calculadora). A ideia é fortalecer discussões sobre os significados e usos dos diferentes tipos de números e das operações, a compreensão das relações numéricas, das operações e de suas propriedades. Com relação aos cálculos, a ideia do texto é valorizar os processos de cálculo baseados em propriedades dos números e das operações, a aprendizagem com compreensão dos algoritmos e dos fatos fundamentais, o cálculo mental e as estimativas. Tais textos estão voltados a algumas ideias fundamentais da Matemática como aproximação, proporcionalidade, ordem e representação, entre outras.

No **Eixo Álgebra**, procurando desmistificar o ensino de Álgebra apenas como manipulação simbólica, o documento apresenta dois textos que discutem o pensamento algébrico. O primeiro se refere aos envolvimentos iniciais das crianças com a Álgebra e à iniciação do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, sem que, necessariamente, sejam utilizadas notações algébricas. O estudo da Álgebra traz uma forma de pensar sobre situações matemáticas que envolvem o processo matemático de generalização, tendo por base a observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas, e expressam essas generalizações usando recursos diversos como a linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos. O segundo texto discute as funções da álgebra e é destinado aos Ciclos Interdisciplinar e Autoral do Ensino Fundamental. Discute, ainda, alguns "erros" cometidos por estudantes apontados na literatura e outros identificados em protocolos de estudantes do 7º ano. Nesse Eixo, os textos focalizam algumas ideias fundamentais da Matemática, como a equivalência, a proporcionalidade, a variação, a interdependência e a representação.

Na Parte II, que inicia no **Eixo Grandezas e Medidas**, há dois textos, um que focaliza os conceitos de grandeza e de medida e explora grandezas usualmente utilizadas no cotidiano e que, tradicionalmente, são trabalhadas no Ensino Fundamental. Destacam-se aspectos dos sistemas de medidas, transformações e relações entre unidades e entre grandezas. Além disso, discutem-se algumas orientações didáticas. O segundo texto desse Eixo envolve duas grandezas geométricas importantes: área e perímetro, explorando conceito, relações entre elas, algumas propostas didáticas e pesquisas que apontam dificuldades de estudantes com tais grandezas. Nesse Eixo, as ideias fundamentais da Matemática, vinculadas aos textos, são a variação, a representação, a equivalência, a aproximação, a interdependência e a proporcionalidade.

No **Eixo Geometria**, os textos focalizam o desenvolvimento do pensamento geométrico. O primeiro apresenta aspectos teóricos que possibilitam a análise de desenhos de estudantes sobre percursos e localizações, no âmbito das relações espaciais. O segundo destaca alguns estudos sobre o pensamento geométrico e apresenta elementos e características de figuras geométricas espaciais, além de protocolos de estudantes em atividades, com foco na evolução do pensamento geométrico, a partir de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento de cada ano de escolaridade sobre figuras espaciais. Os dois últimos textos desse Eixo se referem à geometria plana. Um deles focaliza as figuras geométricas planas, elementos, características e algumas possíveis classificações e outro envolve a geometria das transformações, tema importante para a aprendizagem de ideias fundamentais da Matemática, como a congruência e a semelhança, além de outras ideias matemáticas fundamentais veiculadas nos textos, como a equivalência e a representação.

No **Eixo Probabilidade e Estatística,** o documento explora algumas noções de Estatística, com foco na leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos. O texto de Combinatória focaliza todos os significados ("produto cartesiano", arranjos, combinações e permutações) explorados como ideias sem uso de fórmulas e apresenta exemplos que podem ser desenvolvidos nos Ciclos Interdisciplinar e Autoral. O texto de Probabilidade explora alguns tipos de abordagens possíveis desse tema e apresenta atividades que podem ser desenvolvidas com estudantes desde o Ciclo de Alfabetização. Nesse Eixo as ideias fundamentais da Matemática estão associadas principalmente à variação, à interdependência, à ordem, à representação e à equivalência.

Desejamos uma boa leitura a todos os professores que ensinam Matemática na Rede Municipal de Ensino de São Paulo, que buscam a melhoria da qualidade do ensino e a aprendizagem dos estudantes desse componente curricular.

Bom Estudo!

Eixo Grandezas e Medidas

O ensino e a aprendizagem das grandezas e medidas

A importância das grandezas e medidas

Este texto apresenta algumas reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de um tema matemático importante: grandezas e medidas. Apresentamos aqui algumas discussões importantes que podem ser ampliadas por você, professor, a partir das leituras sugeridas ao longo do texto.

Você consegue imaginar como seria o mundo sem a medida?

Qual é a importância das grandezas e medidas para a formação dos cidadãos?

Anote suas dúvidas sobre o processo de ensino e aprendizagem das grandezas e medidas, leia o texto e identifique quais trechos contribuem para ampliação desses conhecimentos.

O mundo sem a medida, certamente, seria muito confuso e limitado. Teríamos dificuldade de chegar pontualmente ao trabalho, saber a distância entre duas cidades, executar com sucesso uma receita, acompanhar a perda ou ganho de massa numa dieta, programar uma viagem por meio da previsão do tempo, planejar um orçamento doméstico ou acompanhar o consumo de água numa residência. Enfim, encontraríamos dificuldades para realizar inúmeras atividades do cotidiano.

A importância das grandezas e medidas para a formação dos cidadãos é indiscutível. Afinal, este conteúdo matemático, de caráter prático e utilitário, foi construído ao longo da história da humanidade, a partir de inúmeras necessidades cotidianas atreladas ao controle das dimensões espaciais (a demarcação dos limites de terra para o plantio e construções arquitetônicas), temporais (a previsão do ciclo das estações do ano e condições climáticas para plantio, colheita e sobrevivência) e econômicas (a necessidade de um sistema monetário com equivalência de valores para mediar as relações comerciais).

É evidente que, ao longo da história, novos problemas foram surgindo e, consequentemente, as diversificações de seus usos e as variações das grandezas também se fizeram necessárias. Atualmente, são inúmeras as áreas de conhecimento que recorrem às grandezas e medidas para o desenvolvimento de suas atividades, como: a arquitetura e engenharia, que necessitam da medida no cálculo das dimensões de um prédio; a gastronomia, que utiliza diferentes instrumentos de medição para definir a quantidade de ingredientes no preparo de uma receita; a medicina, que orienta e acompanha a administração das dosagens de uma medicação e do seu tempo de tratamento; e também a tecnologia, que recentemente tem definido unidades de medida para mensurar o armazenamento de dados nos computadores, celulares e dispositivos. Se relatássemos aqui todas as atividades nas quais as grandezas e medidas são essenciais, certamente as páginas deste texto não seriam suficientes.

Reflita sobre outras atividades cotidianas que envolvem as grandezas e medidas.
Quais são mais próximas e significativas para os estudantes da sua turma?

Entretanto, mesmo que seja um componente imprescindível nos currículos escolares, existe uma evidente contradição entre a relevância dada ao seu uso social e ao tratamento didático que a escola lhe tem conferido. A organização hierarquizada do planejamento da matemática escolar, que tende a privilegiar conteúdos em detrimento de outros, historicamente tem relegado o ensino das grandezas e medidas, limitando-as a um ensino esporádico, sazonal. A respeito dessa problemática, Mandarino (2009), em sua pesquisa, constatou que, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, dos 116 professores pesquisados, apenas 14,9% priorizavam o ensino das grandezas e medidas. Prioridade essa que, a partir da organização do currículo em rede, proposta no Currículo da Cidade, a própria articulação entre os eixos estruturantes no planejamento do professor, deve ser igualitária e indiscriminada. Além disso, afirma que é forte a crença de que os conhecimentos numéricos e geométricos são suficientes para a construção conceitual e de habilidades inerentes à medida.

Essas abordagens são contraditórias, passíveis de questionamentos e, de certo modo, contribuem para a reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem das grandezas e medidas.

Reflita sobre outras atividades cotidianas que envolvem as grandezas e medidas.

Quais são mais próximas e significativas para os estudantes da sua turma?

A partir dos questionamentos, reflita sobre como tem sido a sua prática no ensino das grandezas e medidas:

- Com qual frequência você tem abordado as medidas em seu planejamento? Quais grandezas você tem priorizado?
- Como o conhecimento numérico pode contribuir para o processo de aprendizagem das grandezas e medidas? Saber representar numericamente uma medida é suficiente para a compreensão do que é medir?

Essas e outras questões podem ser esclarecidas a partir de algumas contribuições teóricas sobre o ensino das grandezas e medidas.

Contribuições teóricas sobre o ensino das grandezas e medidas

Mediante tantas situações diárias, em que as grandezas e medidas são utilizadas, a compreensão e a distinção de alguns conceitos são essenciais para que o professor possa planejar diferentes estratégias de ensino.

Você sabe qual é a diferença entre grandezas e medidas?

Para identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre as grandezas e medidas, o professor pode introduzir a temática por meio de questões reflexivas cujas respostas servem de diagnóstico para realizar intervenções futuras e de ponto de partida para o planejamento de atividades: para você, o que é medida? Em que situações do cotidiano você utiliza a medida? Por que ela é importante?

Grandeza é tudo aquilo que pode ser contado, mensurado. Existem dois tipos de grandezas: as discretas e as contínuas. Essas grandezas envolvem duas noções elementares da matemática, ou seja, contar e medir. As grandezas discretas são consideradas contáveis, pois podem ser facilmente quantificadas. Já as grandezas contínuas são passíveis de medida, pois não permitem a contagem direta/imediata. Enquanto a primeira resulta na quantidade de objetos (contagem); a segunda quantifica suas qualidades (massa, temperatura, comprimento, capacidade, valor, volume e tempo) por meio da medida.

De acordo com Frías *et al*. (2008), para medir é preciso saber previamente o que se mede. Por essa razão, é necessário refletir acerca das qualidades e dos atributos das pessoas e dos objetos, uma habilidade fundamental que dá origem à compreensão do conceito de medida.

Reflita sobre as qualidades e as propriedades das situações descritas a seguir:

- Saco de maçã: 9 unidades, 1kg custa R$ 6,49.

- Jogador de futebol: 22 anos, 1,75m de altura, 68kg.

Observa-se que um mesmo objeto ou pessoa é constituído por diferentes grandezas que podem ser discretas (unidades de maçãs) ou contínuas (massa, valor, altura e idade). A grandeza discreta é mais evidente do que a grandeza contínua, por isso, observar e explorar as qualidades dos objetos e pessoas vai além da quantificação.

Apresente aos seus estudantes diferentes objetos e convide-os a observar e identificar as suas qualidades. Verifique quais propriedades são mais perceptíveis para eles e realize intervenções para que descubram outras que são menos evidentes.

No processo de quantificação das grandezas discretas geralmente o resultado é um número inteiro – o número de carros em um estacionamento. Já no procedimento de medição das grandezas contínuas, a representação da medida pode ser um número não inteiro – a área deste mesmo estacionamento. Existe, portanto, uma diferença significativa entre as ações de contar e medir. Enquanto a contagem requer apenas a quantificação; a medição exige um processo mais complexo, a comparação de grandezas de uma mesma natureza. Frías *et al.* (2008) afirmam que o processo de comparação de uma grandeza requer o uso de advérbios (comparativos) e de adjetivos (qualidades) que caracterizam a sua natureza. Por exemplo: maior-menor, longe-perto, alto-baixo, largo-estreito, vazio-cheio, cedo-tarde, caro-barato, quente-frio e dentre outros. Sendo assim, medir, além de contar, exige a habilidade de comparar, ou seja, uma vez que se percebe a qualidade de um objeto, há condições de compará-la.

De acordo com Brolezzi (2000), apesar da imbricação entre as grandezas discretas e contínuas, a abordagem didática que privilegia uma ou outra, sem explorar a interação entre as ações de contar e medir, tem se constituído um verdadeiro problema pedagógico no ensino desse conteúdo matemático. Para o autor, muitos materiais didáticos referenciam apenas a contagem como habilidade essencial para a construção da ideia de número, desconsiderando que a comparação, a partir da noção de maior ou menor, habilidade inerente à medida, também contribuiu para a sua origem.

Mas, afinal, se os números surgiram da necessidade de contagem e de práticas de medida, qual o sentido de separar o ensino das grandezas discretas e contínuas?

Reflita sobre essa questão e continue a leitura do texto.

Podemos exemplificar a relação entre contar e medir quando a medida de uma determinada distância é realizada por meio da contagem de passos. Nesta situação, a distinção entre medir e contar se concentra no uso e no significado atribuído ao número de passos, ou seja, não representa uma quantidade, mas sim, a medida de uma grandeza linear. Desse modo, podemos dizer que “a operação de medir consiste em discretizar o contínuo” (MOURA, 1995, p.116). Para discretizar o que é contínuo, é necessário estabelecer uma unidade de medida padrão de uma mesma natureza a partir da relação de “quantos cabem”, ou seja, quantas vezes a unidade de medida menor cabe na maior. Por exemplo: quantos copos de 250 mililitros cabem em um recipiente de dois litros? Essa relação de “quantos cabem” é importante para explicitar e medir a grandeza (qualidade) mensurada do objeto, processo denominado de discretização. Por isso, embora atrelada à função do número natural, a construção do conceito de medida vai além da sua representação numérica. É um processo de assimilação complexo que requer diferentes habilidades: identificar e selecionar a qualidade do objeto; comparar e discretizar essa mesma qualidade por meio de estratégias pessoais ou de instrumentos de medição padronizados; utilizar um vocabulário específico para expressar o processo de comparação e, por fim, representar numericamente a quantificação dessa mesma qualidade.

De acordo com Vece (2017), o processo de discretização das grandezas se difere de acordo com a sua natureza, por isso em alguns casos se torna mais complexo. Por exemplo: medir o comprimento de um objeto (uma fita de cetim), uma grandeza visível/concreta, é diferente de medir o tempo de uma partida de futebol, grandeza abstrata que só se torna possível por meio de um cronômetro ou relógio, afinal, a passagem de um minuto para outro não é facilmente perceptível sem o auxílio de um instrumento de medida. Do mesmo modo, Frías *et al.* (2008) advertem que a percepção das qualidades difere uma das outras, pois têm a ver com determinados sentidos e experiências vivenciadas pelos sujeitos no cotidiano. Há qualidades, como a massa, que se percebem mais facilmente, posto que se materializam sem dificuldade, sendo que outras têm uma concretização mais difícil, como é o caso da temperatura, em que sua percepção é muito mais complexa. Por isso, é importante levar em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes, pois permitem identificar as grandezas que lhes são familiares (comprimento, massa e capacidade) e de outras (tempo, temperatura e valor), que, embora frequentes no cotidiano, não têm identificação intuitiva, imediata.

Você já parou para pensar sobre a importância de considerar as características de cada grandeza para ensiná-la?

De acordo com a sua experiência em sala de aula, quais grandezas os estudantes apresentam mais facilidade para compreender? Por quê?

Para Vece (2017), historicamente, os currículos de matemática têm abordado o ensino da medida a partir de uma perspectiva generalista com pouco aprofundamento e distinção entre as grandezas, como se não houvesse a necessidade de adequar a abordagem didática e metodológica para o ensino de cada uma delas. Desse modo, o princípio didático deste eixo estruturante é que, embora os objetos de conhecimento e os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento façam menção a diversas grandezas em uma mesma descrição, é crucial que o professor em seu planejamento, leve em consideração as suas especificidades, distinguindo e aprofundando a natureza de cada grandeza, de modo a relegar abordagens que priorizem umas em detrimento de outras ou que lhes configuram um tratamento superficial. Para isso, apresentamos algumas orientações didáticas.

Consulte o documento curricular e leia os objetos de conhecimento e os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do eixo grandezas e medidas. Durante a leitura, atente-se aos seguintes aspectos:

Quais grandezas estão previstas para o trabalho com a sua turma?

Que tipo de estratégia e instrumento de medida é priorizado? Pessoal ou convencional?

O ensino das grandezas e medidas

Pesquisas revelam que, antes mesmo de adquirir a habilidade de quantificar (contar), a criança observa e explora as características e propriedades (qualidades) dos objetos, pessoas e situações concernentes às grandezas contínuas. Comumente, iniciam o princípio de comparação a partir de medidas relacionadas ao seu próprio corpo ou de atividades diárias que lhes são significativas: meu irmão é “mais baixo” do que eu; minha mochila é mais pesada do que a sua; eu vou à escola no período da manhã e o meu colega à tarde; o meu copo de suco está mais cheio do que o seu; e entre outras inúmeras situações que acontecem no cotidiano e que carecem de sistematização. Por isso, devido ao seu caráter prático e utilitário, é imprescindível que o ensino das grandezas e medidas seja conduzido por meio de situações práticas reais, presentes no contexto social, em que seus usos e funções tenham significado. Afinal, só aprende a medir, medindo!

Em algumas situações do cotidiano, a comparação entre grandezas de uma mesma natureza podem ser realizadas sem a utilização de instrumentos de medida a partir de uma simples comparação direta. Como exemplo, comparar a estatura de duas pessoas para saber quem é maior ou menor. Para isso, a aproximação de ambas se torna suficiente, não sendo necessário o uso de um instrumento convencional e a representação numérica para saber quem é maior ou menor. E se a grandeza a ser comparada for outra? A massa corporal, por exemplo? Neste caso, o uso de uma balança será imprescindível, principalmente, se a diferença da massa corpórea não for suficientemente perceptível para comparar. Isso mostra que a comparação direta entre grandezas nem sempre é possível, como no caso da altura de um prédio ou da área de um campo de futebol. Esses casos são denominados de comparação indireta, pois exigem uma unidade de medida padrão e instrumentos convencionais que permitem a medição exata. Desse modo, o processo de ensino das grandezas e medidas deve proporcionar situações de aprendizagem de comparação direta e indireta, de modo que a necessidade do uso de instrumentos convencionais para medição aconteça naturalmente.

A ênfase nos aspectos conceituais deverá acontecer por intermédio do professor ao longo das experiências vivenciadas pelos estudantes e de acordo com as prescrições previstas para cada ciclo. A proposta é que, no decorrer do Ensino Fundamental, haja progressão das atividades que privilegiem a transição entre diferentes unidades e instrumentos de medida, perpassando por situações em que o uso de unidades arbitrárias (não convencionais), padronizadas (definidas pelos estudantes) e legais (convencionais) seja explorado (MUNIZ *et al.*, 2008), como também a articulação das grandezas e medidas com a função social dos números naturais, com os números racionais devido a sua representação decimal e com a geometria, uma vez que a medida é inerente ao estudo das formas e dos espaços. Para isso, é importante se atentar à progressão dos objetos de conhecimento e dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento prescritos no currículo para cada ano de escolaridade.

De acordo com o documento curricular de matemática, é recomendável que no Ciclo de Alfabetização, as crianças tenham primeiramente a oportunidade de explorar as partes do corpo como unidades arbitrárias e como primeiro instrumento para medir, comparar e estimar grandezas. Por exemplo, utilizar a polegada, palmo, pé, passo e braço para medir a grandeza de comprimento; explorar o movimento da balança de contrapeso, tendo o corpo como eixo central e os dois braços como pratos para comparar a massa de dois objetos para saber qual é o mais leve e o mais pesado ou utilizar, ainda, um peso padrão em uma das mãos para verificar o equilíbrio e aproximação entre as massas; estimar e comparar a capacidade de recipientes de tamanhos diferentes a partir da observação; observar a passagem do tempo a partir da análise de autorretratos e fotografias do próprio desenvolvimento.

A condução de atividades dessa natureza pode ser fundamentada pelo professor a partir das contribuições da História da Matemática, resgatando a origem da medida em diferentes civilizações em que os primeiros instrumentos da humanidade utilizados para medição foram as partes do corpo. Mesmo entre os povos latino-americanos atuais, a diversidade de padrões de medida é enorme e pode ser explorada pedagogicamente em sala de aula. Além dos aspectos históricos, cabe ao professor desenvolver situações-problema que gerem reflexões nos estudantes e para que percebam que, em alguns momentos, o uso de partes do corpo como unidade de medida de comprimento é inadequado, tendo em vista que palmos, pés, dedos e braços são de tamanhos diferentes e que as percepções táteis (para comparar medidas de massa e capacidade) e visuais (para observar a passagem do tempo) não são suficientes e exatos e que, por isso, tornam-se arbitrárias.

É por meio dessas situações de conflito que o professor poderá introduzir e problematizar a necessidade da padronização de unidades de medida, promovendo a transposição da unidade arbitrária para a unidade padrão que não precisa, necessariamente, ser do sistema legal. As crianças poderão escolher alguns objetos como unidade de medida de comprimento (lápis, borracha, caderno, palitos, clips, estojo, apagador, barbante e etc.) para medir outros; confeccionar balanças com materiais recicláveis, explorar, no parque da escola, a gangorra para comparar a massa corporal entre as duplas ou, ainda, estabelecer um objeto como referência de unidade de medida de massa (quantos clipes são necessários para medir a mesma massa de uma borracha?); utilizar recipientes não demarcados como unidade padrão de medida de capacidade, por exemplo, a tampa de um vasilhame para encher um copo. A mesma proposta de unidade padrão pode ser realizada para o trabalho com o sistema monetário, antes de apresentar as cédulas e moedas oficiais, o professor pode atribuir valores às fichas ou tampinhas coloridas para introduzir a ideia de troca e equivalência de valores, por exemplo: tampinha vermelha vale 1, amarela 10 e branca 100. De quantas tampinhas vermelhas preciso para trocar por uma amarela? E para trocar por uma tampinha branca?

Situações dessa natureza proporcionam a construção de habilidades inerentes à ação de medir, por exemplo: para comparar comprimentos é necessário emparelhar a unidade de medida (barbante) de uma extremidade à outra do objeto a ser medido (caderno); para medir massa e capacidade é preciso estabelecer uma unidade padrão de comparação a partir da ideia inclusiva de "quantos cabem"; para compreender a organização do sistema monetário é preciso comparar e realizar trocas a partir de valores equivalentes e etc.

Devido a sua natureza específica, a grandeza tempo aparece como uma atividade permanente no planejamento do professor, por meio do uso das horas e do calendário. É importante que a percepção temporal seja construída nas situações que envolvem as rotinas diárias dos estudantes no tempo presente (manhã, tarde e noite), identificando a passagem do tempo por meio da organização de acontecimentos, compromissos e atividades comuns ao grupo, a partir da sucessão das horas do dia, ampliando para reflexões sobre o tempo futuro (dias, semanas, meses e anos). Para isso, a exploração de diferentes instrumentos de medida utilizados ao longo da história da humanidade é essencial nesse processo (ampulheta, relógio de sol, de ponteiro e digital, calendário), lembrando que a ênfase às equivalências das diferentes unidades de medição do tempo deve permear todo o trabalho.

Como, no Ciclo Interdisciplinar, a capacidade de raciocínio e complexidade deve ser ampliada, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para as grandezas e medidas exigem uma atenção especial para a ampliação de conhecimentos por parte dos estudantes. É por intermédio de atividades de investigação, intencionais e planejadas que poderão ampliar as práticas sociais que exigem padronização para mensurar as

Leia o caderno de textos MORAES, M. D.; MELO, R.A.T.; Medidas no Ciclo de Alfabetização". do Programa Salto para o Futuro. Ano XXIV - Boletim 8 - Setembro 2014. Disponível em: http://cdnbi.tvescola.org.br/resources/VMSResources/contents/document/publicationsSeries/16532008_14_MedidaseGrandezasnociclodaalfabetizacao.pdf. Acesso em 3 dez. 2017.

propriedades dos objetos. A proposta é que as vivências práticas antecedam e sustentem o trabalho futuro com a nomenclatura e conversão das unidades de medida, até mesmo para que se desenvolva a compreensão de que o instrumento e a unidade de medida devem ser coerentes com a natureza da grandeza, ou seja, é impossível medir a capacidade de um recipiente com uma trena. Embora aparentemente isso nos seja óbvio, ao longo da trajetória escolar, os estudantes apresentam conflitos nessa construção. Sendo assim, é importante que o professor trabalhe, com ênfase, a necessidade da unidade legal (universal) de medida e dos seus instrumentos por meio de problematizações do cotidiano: quais instrumentos de medida encontramos nos supermercados, farmácias, padarias, consultórios médicos, marcenarias? Se não existissem esses instrumentos, como compraríamos o revestimento de uma parede, um tecido, um alimento etc.?

Para contextualizar a identificação dessas grandezas em situações de uso social, o professor pode confeccionar um cartaz com os estudantes a partir de pesquisas em revistas, jornais, rótulos, folhetos de propaganda e embalagens, destacando os números e as siglas que os acompanham. A exploração da representação escrita desses números (se aparecem com vírgula, quais são os seus significados, qual é a grandeza numérica mais comum etc.), bem como a leitura e tradução das siglas que os acompanham (cm, m, ml, l, g, mg, kg e etc.) é de suma importância, pois, embora apareçam com frequência no contexto social, muitos estudantes não conhecem os seus significados, o que requer do professor intervenções intencionais de ensino. Neste caso, a construção de uma tabela com as siglas, seus significados e as respectivas unidades de medidas pode servir como ponto de apoio e complemento às aulas.

Siglas: unidades de medida			
Grandeza	Sigla	Significado	Representação numérica
Comprimento	mm	Milímetro	0,001m
	M	Metro	1m
	Km	Quilômetro	1000m
Capacidade	ml	Mililitro	0,001l
	L	Litro	1l
	Kl	Quilolitro	1000l
Massa	mg	Miligrama	0,001g
	G	Grama	1g
	Kg	Quilograma	1000g

A partir da tabela que apresenta as unidades de medidas mais usuais, você pode explorar algumas regularidades importantes sobre as medidas de comprimento, capacidade e massa. Apresente aos estudantes questionamentos do tipo:

Qual a relação da sigla com o seu significado?

Como saber se a sigla se refere a metro, litro ou grama?

O que tem em comum na representação numérica entre milímetro, mililitro e miligrama? E entre quilômetro, quilolitro e quilograma? Por que suas representações numéricas são semelhantes?

O que acontece com a transformação do metro para milímetro? E para quilômetro?

A proposta é que, a partir das próprias observações dos estudantes, o professor introduza a transformação entre as unidades de medida de comprimento, capacidade e massa utilizando a ideia de múltiplos e submúltiplos de base decimal.

Você pode ainda construir uma tabela semelhante considerando as especificidades da unidade de tempo – hora - que possui uma organização própria, sexagesimal, ou seja, de base 60.

O professor pode explorar o conceito de múltiplo e submúltiplo, atrelando-o às características do sistema de numeração e à representação decimal dos números racionais.

Retome a leitura do texto no volume I, “Construção dos números naturais e do sistema de numeração decimal” para retomar as características e regularidades do nosso sistema numérico.

O uso de um quadro de valor posicional, contendo as partes inteiras e decimais e a relação dos múltiplos e submúltiplos, pode auxiliar os estudantes no processo de familiarização da leitura e escrita dos números que representam uma medida.

Quadro de valor posicional: múltiplos e submúltiplos do metro						
Partes inteiras				Partes decimais		
Unidade de milhar	Centena	Dezena	Unidade	Décimo	Centésimo	Milésimo
Quilômetro (km)	Hectômetro (hm)	Decâmetro (dam)	Metro (m)	Decímetro (dm)	Centímetro (cm)	Milímetro (mm)
			1			
		1	0			
	1	0	0			
1	0	0	0			
			0,	1		
			0,	0	1	
			0,	0	0	1
			4,	8	5	6

Fonte: PIRES, 2012, p.237-238 (Adaptado).

Embora o enfoque seja dado às unidades de medida mais usuais, o trabalho com o quadro de valor posicional de múltiplos e submúltiplos mostra as transformações entre as unidades, quando multiplicadas ou divididas por 10, e qual a sua implicação para o uso e deslocamento da vírgula. Para essa discussão, a calculadora é um recurso recomendável, já que essa transformação fica evidente para o estudante no visor. O quadro também torna explícita a organização de "quantos cabem" inerente à medida, evidenciando para o estudante, por exemplo, que 1000 metros correspondem a 1 quilômetro. O quadro de valor posicional pode ser explorado ainda como auxílio à escrita e leitura de um número decimal (quatro metros, oitocentos e cinquenta e seis milímetros), servindo como apoio para os estudantes que, durante a leitura, tendem a recorrer e generalizar os conhecimentos que já possuem sobre os números inteiros, o que consiste em um verdadeiro obstáculo. Por isso, é importante que o professor aprofunde as características dessa representação, discutindo qual é o papel da vírgula e como as ordens do número influenciam na sua leitura.

Utilize o quadro de valor posicional para trabalhar os múltiplos e submúltiplos das grandezas de capacidade e massa.

Amplie as possibilidades deste recurso propondo o registro de números decimais por meio de um ditado ou da transcrição das representações que aparecem nos rótulos e embalagens.

O trabalho com estimativa também deve permear o ensino das grandezas e medidas, principalmente, para a compreensão das medidas de capacidade, massa, valor e temperatura. Estimar é uma habilidade comumente utilizada em situações do cotidiano. Convide os estudantes a estimarem a massa de objetos, alimentos e pessoas; a capacidade de vasilhames, garrafas e recipientes; o valor de produtos diversos; e a temperatura do ambiente ou corporal; destacando a importância desta prática no contexto social, principalmente, nas áreas comerciais. No início é comum que as estimativas dos estudantes sejam discrepantes (para mais ou para menos) do resultado real, porém esse é um processo natural, as vivências com diferentes situações de estimativa permitem que, aos poucos, os palpites sejam mais precisos e coerentes.

Além da ênfase na representação numérica da medida, é no Ciclo Interdisciplinar que a articulação entre as grandezas e medidas com a geometria fica em evidência a partir dos objetos de conhecimento perímetro e área de figuras planas. Pesquisas recentes evidenciam que, nas últimas décadas, a escola tem conferido privilégio ao ensino desses conceitos à geometria. Entretanto, por serem temas que se articulam com a aritmética, álgebra e à própria geometria, vêm ganhando destaque, constituindo-se como campo conceitual das grandezas geométricas, sendo assumidos, portanto, no documento curricular pelo eixo estruturante grandezas e medidas.

Leia o artigo:
BRITO, A. F; BELLEMAIN, P. M. B.Influência do uso de materiais manipulativos na construção da grandeza de comprimento. XIII ENEM, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/01/CC00073428450.pdf. Acesso em: 03 dez. 2017.

Estudos apontam que propostas tradicionais de ensino que enfatizam a definição de conceitos, que transmitem regras para aplicação direta do conteúdo matemático e que priorizam a memorização de fórmulas para o cálculo da área e do perímetro pouco contribuem para a construção desses conceitos, causando, consequentemente, confusão no seu processo de aquisição. Enquanto conteúdo das grandezas geométricas, a construção dos conceitos de área e perímetro deve estar atrelada às habilidades de medida, ou seja, comparar, identificar e definir grandezas, estabelecer uma unidade de medida padrão, considerando a sua natureza e articular e diferenciar a figura, a grandeza a ela associada e a medida dessa grandeza. Por isso, para o desenvolvimento de situações de ensino sobre área e perímetro, recomendamos o trabalho com os diferentes níveis de conhecimento dos estudantes, tendo em vista que a compreensão desses conceitos tem se constituído como um verdadeiro desafio para o professor.

Para aprofundar sobre a abordagem teórica dos níveis de conhecimento leia o artigo "O estudo das noções de área e perímetro considerando os níveis de conhecimento esperado dos educandos como ferramenta didática" Disponível em http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T12_CC900.pdf.

No Ciclo Autoral, o trabalho com as grandezas e medidas deve priorizar a sistematização e ampliação dos conhecimentos adquiridos nos ciclos anteriores por meio da fluência, rigor e formalização da linguagem matemática com o intuito de que os estudantes façam uso das notações e simbologias dessa área de conhecimento.

De acordo com os objetos de conhecimento e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, o ensino das conversões de unidades de medidas usuais e de área e perímetro prossegue sendo ampliado para aplicação em situações de resolução e elaboração de problemas. Destaca-se a introdução de novos objetos de ensino, como: medição de ângulos, volume (unidades de cúbicas de medida), conceito de escala e a ampliação de outras grandezas não trabalhadas nos ciclos anteriores (velocidade e densidade).

O trabalho com a solução e elaboração de problemas, envolvendo o cálculo de medida de volume, a partir de unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico), permeia todos os anos do Ciclo Autoral (do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental). Por isso, é importante que o professor se preocupe com o planejamento de atividades investigativas que perpassem: (1) o reconhecimento de situações problema; (2) formulação de conjecturas; (3) validação e refinamento das conjecturas; e (4) argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. No Ciclo Autoral, apresenta-se como ótima oportunidade de trabalho com as datas de vencimentos de produtos, componentes químicos presentes, taxa de elementos nocivos à saúde, entre outros e pode dar sentido à importância das medidas.

Leia o trecho de um relato de experiência de uma professora do 8º ano, que propôs um problema algébrico, envolvendo metro cúbico:

Com a palavra

A aula era de Matemática e o conteúdo era a construção de fórmulas para cálculo da conta de água. Assim que coloquei a situação no quadro, Pedro (13 anos) perguntou ironicamente, fazendo um movimento linear com os dois braços para representar o metro cúbico:

− Professora, você está querendo dizer que a água que usamos em casa é vendida por metro cúbico?!!!!

− Sim, Pedro. A água é vendida em metros cúbicos.

Sem conter a admiração, Pedro retrucou e novamente fez o movimento com os braços, indicando que não tinha a representação mental do metro cúbico:

− Metro cúbico, professora?! Fala Sério! Quer dizer que posso chegar lá na CAESB (Companhia de Água e Esgoto de Brasília) e pedir um metro de água?

Neste momento tive a certeza de que Pedro não fazia ideia do que era um metro cúbico e, então, resolvi buscar ajuda na turma:

− Gente, o que é um metro cúbico?

A turma olhou-me espantada e parecia não ter entendido o que eu estava falando. Então, resolvi recomeçar por outro caminho.

− Tá bom.... Vamos fazer o seguinte: digam-me o que é um metro quadrado. Mostrem-me na sala um metro quadrado.

Alguns alunos se remexeram na carteira e apontaram para o retângulo de cimento no piso da sala, outros, no entanto, assistiam impassíveis o que estava acontecendo. Na verdade, pareciam não entender muito bem o que estávamos falando. Letícia (13 anos) foi a primeira a falar:

− Ali no chão tem um metro quadrado.

− Como podemos ter certeza de que é um metro quadrado? – Perguntei à turma.

− Medindo, professora. Se for o metro quadrado, terá um metro assim e assim – falou Letícia, usando as mãos para indicar os lados do quadrado.

Peguei uma fita métrica no armário e pedi a Pedro para medir.

O retângulo tinha 1m x 1,10m, o que nos levou a conclusão que era maior que o metro quadrado (SILVA, 2007, p.3).

Agora reflita sobre os seguintes aspectos:

Quais são os conhecimentos prévios dos estudantes sobre metro cúbico? Quais conhecimentos recorrem na tentativa de estruturar mentalmente esta unidade de medida?

Qual seria a sua proposta didática de continuidade à aula para a construção desse conceito matemático?

Ao final da leitura deste texto, analise os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do documento relativos às grandezas e medidas, verificando a progressão dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento no ciclo em que você atua em relação às grandezas e medidas.

Grandezas geométricas: área e perímetro

Uma breve reflexão sobre as grandezas geométricas área e perímetro

Os conceitos de área e de perímetro são muito importantes de serem desenvolvidos no Ensino Fundamental, pois são relevantes para a formação do cidadão. Nas atividades cotidianas, esses conceitos têm utilidade e surgem com muita frequência, pois o homem tem a necessidade de medir superfícies ou contornos de terrenos, pisos, paredes etc. Além de sua relevância utilitária, os conceitos de perímetro e de área estão presentes nos eixos do Currículo da Cidade como o de números, de grandezas e medidas e de álgebra, e por suas aplicações extramatemática. Porém, nem sempre as tarefas que envolvem essas grandezas geométricas são tão simples quanto parecem à primeira vista, ou seja, não basta saber fórmulas para calcular estas grandezas.

O que você pensa a respeito do ensino de áreas e perímetros? Que tipo de dificuldades você acha que estas noções apresentam para os estudantes? Reflita sobre essas dificuldades e continue a leitura do texto.

Um dos problemas que envolve o ensino dessas grandezas é o caráter de revisão que livros didáticos dão a elas, sem levar em consideração uma abordagem conceitual.

No Ciclo Interdisciplinar, essa noção é iniciada com figuras desenhadas em malhas quadriculadas e unidades de medida explícitas. As atividades propostas se assemelham mais às contagens do que à noção de área ou de perímetro e, apesar dessa iniciação, no Ciclo Autoral, ela é retomada em caráter de revisão, pois muitas vezes se considera que os estudantes já construíram conhecimentos necessários para operar com estas grandezas. Em alguns casos, mesmo sem intencionalidade, as figuras geométricas planas e suas respectivas fórmulas para os cálculos de área e perímetro são introduzidas no Ciclo Autoral, sem a perspectiva de relacioná-las com os estudos realizados no Ciclo Interdisciplinar e de discutir os conceitos envolvidos.

Mas existem outras questões que podem ser relacionadas às dificuldades com relação a essas noções.

Uma delas se refere à confusão dos estudantes no que tange aos conceitos de área e de perímetro e às relações que estabelecem entre essas grandezas e que não são verdadeiras, por exemplo, quando comparam dois polígonos e concluem que a figura que tem a maior área tem necessariamente o maior perímetro. Uma das possíveis confusões é que essas grandezas geométricas são trabalhadas na escola de modo separado, raramente os estudantes se deparam com problemas em que essas duas grandezas geométricas estejam presentes ao mesmo tempo. Por exemplo: pedir para que comparem duas figuras com áreas iguais e perímetros diferentes ou duas figuras em que uma tem a maior área e a outra o menor perímetro ou propor que construam figuras em que essas situações possam ser observadas. Atividades dessa natureza criam maior possibilidade de compreensão dessas grandezas geométricas.

Outra dificuldade se refere à falta de identificação das grandezas, áreas e perímetros, se essas não estiverem explícitas no enunciado de um problema. Os dois problemas a seguir envolvem uma figura retangular, com as mesmas medidas, para ser calculada a área. Os estudantes do Ciclo Interdisciplinar têm mais sucesso na resolução do segundo problema do que no primeiro.

1. Um jardim retangular mede 6 metros de frente por 9 metros de fundos. Quantos metros quadrados de grama é preciso comprar para cobrir todo o jardim?
2. Um retângulo mede 6 cm de base e 9 cm de altura. Qual é sua área?

Por que você acha que os estudantes apresentam mais facilidade para resolver o problema 2? Quais são as implicações que conduzem a esse fato?

Outro aspecto a ser salientado é relativo ao uso de fórmulas para obtenção de áreas e perímetros. O que se nota é que os estudantes utilizam essas fórmulas mecanicamente e acabam obtendo respostas que não são capazes de analisar, além de esquecê-las rapidamente. Assim, é importante que o trabalho se apoie em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas como a decomposição de uma figura plana em outras figuras mais simples cujas áreas são conhecidas. Isso pode facilitar a compreensão do conceito de área. O conceito de área envolve o conceito de "quantas unidades cabem", ou seja, o conceito de unidade de medida e o de medida. A área pode ser calculada por procedimentos de contagem, quando usado o papel quadriculado, por ladrilhamento, por estimativas e por aproximação.

Retome o texto O Ensino e a Aprendizagem das Grandezas e Medidas que aprofunda a ideia de "quantos cabem" presente na construção do conceito de medida.

A maneira de abordar essas grandezas também pode gerar problemas. Por exemplo, quando se apresenta o conceito perímetro como a "soma das medidas de todos os lados de um polígono" pode acarretar um obstáculo didático, pois nem sempre as figuras planas são formadas apenas por segmentos de reta, como é o caso do círculo e de figuras irregulares compostas por segmentos de retas e partes curvas. O perímetro de uma figura plana corresponde ao contorno dessa figura.

As dificuldades apresentadas neste texto podem gerar certo desconforto, pois sem identificá-las parece que o que é ensinado nas aulas não é aprendido pelos estudantes.

O que é importante ensinar em relação ao estudo das noções de área e perímetro? Verifique os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos Ciclos Interdisciplinar e Autoral para ver como esse assunto está abordado.

Atualmente, no cenário acadêmico, algumas pesquisas apontam caminhos para o trabalho específico com as noções de área e perímetro. Essas pesquisas buscam, por meio de abordagens didáticas, fornecer elementos para reflexão que permitem analisar de forma pontual em que residem as dificuldades em relação ao estudo destas noções matemáticas.

O trabalho de Bellemain e Lima (2002), fundamentado na pesquisa desenvolvida por Douady e Perrin-Glorian (1989), destaca algumas dificuldades apontadas neste texto. Segundo os autores:

> [...] o cálculo de área é usualmente ensinado através de fórmulas de área, que são funções que fornecem a medida da área, em termos do comprimento de segmentos associados à figura. Este procedimento é indispensável para o cálculo de áreas, mas, em sua utilização, têm sido verificadas persistentes dificuldades entre os alunos. Uma delas é a confusão entre área e perímetro; outra é a extensão indevida da validade das fórmulas de área: a área de um paralelogramo é o produto dos lados (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p.27).

No quadro a seguir, apresentamos um estudo de Douady, destacado por Bellemain e Lima (2002), que mostra que o conceito de área pode estar atrelado a quadros numérico, geométrico ou das grandezas. Esses três quadros devem ser trabalhados em conjunto para que os estudantes se apropriem do conceito de área e tenham autonomia para resolver problemas, envolvendo esse conceito.

Quadro 1- Conceito de área nos diferentes quadros

Quadro geométrico	Constituído por superfícies planas
Quadro numérico	Constituído das medidas da área das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos
Quadro das grandezas	Contexto próprio das noções de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classes de equivalência de superfícies de mesma área.

Fonte: BELLEMAIN e LIMA, 2002, p.28/29

Nesta concepção, a área de uma superfície plana se mostra um objeto matemático distinto da superfície plana, uma vez que superfícies diferentes podem possuir a mesma área. Também é possível se distinguir o número que está associado a esta superfície quando se trabalha com uma superfície unitária para medi-la (unidade de medida), pois mudar a superfície unitária altera a medida da área, mas a área permanece a mesma (BELLEMAIN; LIMA, 2002). Nesse último caso, podemos mencionar o trabalho que se inicia no Ciclo Interdisciplinar, ao usar o quadradinho da malha quadriculada como unidade de medida.

De acordo com Bellemain e Lima (2002) a construção das relações entre área e perímetro é um processo complexo e dura por vários anos na escolarização. É preciso levar em conta que, entre essas duas grandezas geométricas, existe um processo duplo de diferenciação e de coordenação. É necessário, ao mesmo tempo, diferenciar propriedades simultâneas presentes em uma figura (o comprimento do contorno de uma superfície e a área dela) e coordenar essas mesmas propriedades no caso da apropriação de fórmulas.

Os autores destacam, ainda, que na aprendizagem dessas grandezas geométricas, ficam evidentes tipos de erros variados etiquetados sob a expressão “o estudante não dissocia área e perímetro” e apresentam uma abordagem dessas noções a partir de 4 aspectos diferentes (topológico, dimensional, computacional, variacional).

Quadro 2 - Aspectos diferentes para abordagem de áreas e perímetros	
Topológico	Os conceitos de área e perímetro correspondem a objetos geométricos distintos, a área associada à superfície de uma figura plana e o perímetro a seu contorno.
Dimensional	Uma superfície e seu contorno são objetos matemáticos de naturezas distintas no que diz respeito às suas dimensões. A área envolve duas dimensões e o perímetro uma. Isso traz consequências imediatas sobre o uso das unidades de medida adequadas para expressar as medidas de área e perímetro.
Computacional	Corresponde aos cálculos dessas grandezas, à aquisição das fórmulas de área e perímetro de figuras usuais.
Variacional	Consiste na aceitação de que área e perímetro não variam necessariamente do mesmo modo, ou seja, superfícies de mesma área podem ter perímetros distintos e vice-versa.

Fonte: BELLEMAIN e LIMA, 2002, p.30

Você já tinha pensado sobre esses quatro aspectos no ensino dessas grandezas? Qual deles você privilegia em suas aulas? Já tinha percebido que esses aspectos devem ser trabalhados interligados?

Esses quatro aspectos devem ser focalizados, imbricadamente, nas aulas de Matemática, quando se trata do ensino dessas grandezas geométricas.

É importante considerar também que se faz necessário um estudo mais detalhado, principalmente se desejar propor tarefas matemáticas associadas ao cotidiano dos estudantes para auxiliá-los a compreenderem uma nova noção, pois, além da relação com o mundo que os cerca, é preciso reconhecer seus conhecimentos prévios e o nível desses conhecimentos, verificando se são compatíveis com a tarefa proposta. É importante observar, ainda, que a articulação entre os conhecimentos matemáticos e cotidianos dos estudantes deve ser trabalhada explicitamente pelo professor para que se tornem situações de referência e possam auxiliar na construção dos conceitos de área e perímetro.

Com base nas considerações realizadas até o momento, optamos, aqui, por apresentar algumas questões didáticas sobre o ensino das noções de área e perímetro para provocar uma reflexão com relação ao ensino dessas grandezas geométricas. Em nossa abordagem, tentaremos evidenciar que, muitas vezes, os estudantes não resolvem determinadas tarefas porque o tipo de mobilização de conteúdos necessários à sua resolução depende explicitamente do nível de conhecimento a que se encontra associada determinada tarefa. Para explicar essa questão, apresentaremos a abordagem teórica da pesquisadora francesa Aline Robert (1998), que pontua tais níveis como aqueles de funcionamento do conhecimento e os classifica em três categorias: técnico, mobilizável e disponível.

Uma abordagem didática para as noções de área e perímetro

A importância do estudo dos níveis de conhecimento, esperados dos estudantes, vem do fato de que professores, muitas vezes, mesmo que de maneira implícita, esperam dos estudantes certa disponibilidade de conhecimentos e se mostram preocupados quando esses demonstram desconhecê-los (ROBERT, 1998).

No geral, espera-se que o estudante mobilize conhecimentos para resolução das tarefas que são propostas, levando em conta a etapa da escolaridade em que ele se encontra. Mas dificilmente seus conhecimentos prévios são considerados e, mesmo que estes sejam levados em consideração, não se adequam as tarefas ao diagnóstico realizado.

Você saberia dizer o que significam os níveis técnico, mobilizável e disponível?

Para melhor compreensão da questão acima, apresentamos uma síntese dos três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, conforme a abordagem teórica de Robert (1998), em que faremos a conexão dessa abordagem didática articulada às noções de área e perímetro.

Segundo a autora, o nível técnico corresponde à resolução de uma tarefa de imediato. Sua solução está associada à utilização de uma ferramenta, por exemplo, a aplicação imediata de uma fórmula ou um teorema. O conceito está explícito e não são necessárias adaptações ou mobilização de outros conteúdos.

Com base no retângulo abaixo, calcule sua área e perímetro:

Fonte: SANTOS, 2008a, p. 26

Figura 1 – tarefa nível técnico

Nesse exemplo, podemos verificar que a resolução da tarefa é imediata, pois depende apenas da aplicação da fórmula de cálculo de área e de perímetro do retângulo, uma vez que as medidas dos seus lados são fornecidas junto à figura de maneira explícita.

Em certos momentos, é importante trabalhar o nível técnico, porém também é necessário articulá-lo com os níveis mobilizável e o disponível.

Para o nível mobilizável, já existe uma justaposição de saberes de um determinado objeto, ou seja, corresponde à resolução de uma tarefa em que, apesar de o objeto estar explícito, é necessária uma pequena adaptação, e é preciso mobilizar outros conhecimentos para resolução da tarefa.

Neste nível, a resolução da tarefa não se encontra associada apenas à pura aplicação de uma fórmula ou teorema, é preciso fazer uma adaptação. A figura 2 apresenta uma tarefa no nível mobilizável.

Determinea área e o perímetro de um quadrado cujo lado mede 12 cm

12 cm

Fonte: Adaptado de SANTOS, 2008a, p. 27

Figura 2 – tarefa nível mobilizável

Nesta tarefa, é possível perceber que o objeto está explícito, porém cabe ao estudante identificar a figura (quadrado) e suas propriedades (lados com a mesma medida), além de uma maneira que permita calcular a área e o perímetro solicitados. Podemos verificar a diferença entre esta situação e a anterior, uma vez que, no nível mobilizável, apenas o conhecimento de fórmulas não é o suficiente para solucionar a situação proposta em um primeiro momento.

Nesse nível, aceita-se ainda uma indicação ou ajuda do professor para que o estudante resolva a tarefa proposta.

Vejamos outro exemplo de uma tarefa no nível mobilizável:

Um disco de pizza tem 40 cm de diâmetro. Essa pizza está dividida em 8 fatias iguais. Use $\pi = 3.14$ e determine a área aproximada de cada fatia.

Nesse exemplo, a primeira adaptação que o estudante deve fazer é lembrar que, para o cálculo de área de um círculo, é necessário dividir seu diâmetro por 2, ou seja, ele precisa primeiro encontrar o raio e, posteriormente, observar que o solicitado não é a área da pizza e sim de cada fatia em que ela foi dividida. Aqui, apesar da noção de área ser explícita, são necessárias algumas adaptações para que os estudantes resolvam com êxito a tarefa proposta.

Segundo Robert (1998), o nível disponível é aquele em que o estudante deve resolver a tarefa proposta sem nenhuma indicação ou ajuda do professor. Neste nível o objeto não está explícito. É necessário recorrer a conhecimentos anteriores e articular representações, diferentes noções etc.

Vejamos o exemplo de tarefa nível mobilizável:

Em torno de uma quadra de futebol de salão, de comprimento 15m e largura 8m, deseja-se deixar uma faixa de largura constante. A área da quadra, com a faixa, deve ser 198 m2. Qual deve ser a largura da faixa?

Fonte: IEZZI; DOLCE e MACHADO, 2005, p.62.

Esse nível representa tarefas que significam um desafio, uma vez que o estudante deve organizar seus conhecimentos anteriores de forma a planejar a solução do que é proposto na tarefa.

Nesse exemplo, é necessário que o estudante faça o esboço de uma quadra, sabendo que, no geral, as quadras de futebol de salão são retangulares e, ainda, disponha da noção algébrica sobre equações polinomiais de 2° grau. Assim, os objetos usados para a resolução desse problema não são explícitos. A resolução necessita de mobilização e de articulação de objetos do conhecimento matemático, de representações matemáticas e da forma como estudantes colocam em funcionamento conhecimentos aprendidos anteriormente. Consideramos que, para efetivação desse processo, a aprendizagem não pode se fazer apoiada em procedimentos mecânicos e, muito menos, de forma compartimentada.

Vejamos outro exemplo, esse de tarefa nível disponível:

Um pintor cobra R$ 5,00 por metro quadrado de parede, que ele pinta, e R$ 3,00 por metro linear de rodapé colocado. Quanto ele deve cobrar para colocar rodapé, pintar as quatro paredes e o teto de um salão de 10 m de comprimento, 6 m de largura e 3 m de altura?

Fonte: Adaptado de IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2005, p.264

Na tarefa apresentada acima, a noção de área e perímetro não é explícita, apesar de ser necessária para sua solução. O estudante deve buscar, em seus conhecimentos anteriores, os objetos matemáticos envolvidos (área e perímetro), as ferramentas matemáticas adequadas para resolver a situação e, também, organizar as informações apresentadas no enunciado de forma a utilizá-las para a solução da tarefa.

Os exemplos citados mostram a importância de o educando saber mobilizar conhecimentos de nível técnico para a solução das tarefas propostas, em que os níveis exigidos são o mobilizável e disponível e deixam evidentes as diferenças existentes entre os três níveis.

Quais níveis você tem priorizado em sala de aula? Qual a importância do trabalho com a variação dos níveis de conhecimento?

Algumas considerações sobre o estudo das noções de área e perímetro

Buscamos, por meio destas reflexões, enfatizar que a "forma como se ensina", provavelmente, é mais importante do que "o que se ensina". As maneiras de ensinar podem levar os estudantes a apresentar dificuldades para desenvolver habilidades necessárias à articulação e mobilização de conhecimentos matemáticos.

É importante lembrar que há necessidade de trabalho com os três níveis de conhecimento e que o domínio de tarefas de nível técnico é fundamental para a solução de tarefas que levem em consideração os níveis mobilizável e disponível.

As categorias, apresentadas por Aline Robert (1998), funcionam como uma ferramenta de análise, possibilitando a elaboração de sequências didáticas que permitem a evolução dos estudantes nos seus conhecimentos e elaboração de estratégias metodológicas e didáticas para a superação de suas dificuldades por parte de professores.

Dessa forma, é importante que a aprendizagem esteja associada à articulação dos três níveis de conhecimento, ou seja, o estudante deve mobilizar conhecimento de nível técnico, que é uma ferramenta necessária para a solução de tarefas de níveis mais complexos.

É necessário, também, que no trabalho de sala de aula se ressaltem as diferenças conceituais de área e perímetro, pois são duas grandezas geométricas que acabam trabalhando conjuntamente e que são necessárias não somente em tarefas habituais com aplicações de fórmulas, mas também um importante articulador na resolução de tarefas de outros eixos matemáticos do Currículo da Cidade.

Foto: Daniel Cunha - Núcleo de Foto e Vídeo Educação / CM / COPED / SME

Eixo Geometria

Relações Espaciais

Introdução

Neste texto, vamos discutir o ensino das noções espaciais.

Você já percebeu que muitas pessoas, mesmo na idade adulta, ainda têm problemas para se localizar e para dar informações sobre a localização de um determinado objeto? As noções espaciais não são intuitivas, têm vocabulário próprio e precisam ser desenvolvidas na escola. Você trabalha com esse tema com os estudantes? Que objetos do conhecimento você procura selecionar para o seu trabalho?

Reflita sobre esses objetos de conhecimento e continue a leitura do texto.

Noção Espacial

Para desenvolver noções espaciais, é importante que as crianças e os adolescentes tenham oportunidade de vivenciar o espaço que estão inseridos por meio de atividades práticas exploratórias como: informar a localização de pessoas e objetos. Curi (2013) destaca que esse tema é relativamente novo nos currículos. Para a autora, é uma temática que precisa estar relacionada ao seu uso social. Outro ponto fundamental que destaca é que as interações propiciadas pelas diversas formas de comunicação caracterizam a aquisição de competências geométricas iniciais de naturezas distintas, sendo elas: a primeira refere-se à comunicação com o uso de vocabulário próprio e compreensível não só pelos estudantes, mas também no ambiente social; a segunda envolve a leitura e interpretação do espaço, essencial para a compreensão de noções espaciais e de seus elementos e a terceira abrange as construções de representações do espaço. São habilidades distintas, afinal, é muito diferente descrever e compreender um espaço já representado, de representá-lo. Essas três competências são imbricadas, mas, quando separadas, ajudam o professor na exploração do vocabulário, na compreensão do espaço e na construção de representações espaciais.

Pense nessas três competências (comunicar, interpretar e representar o espaço) e nos objetos de conhecimento indicados no Currículo da Cidade. Faça uma reflexão a respeito e reorganize sua prática para que essas competências sejam contempladas no planejamento das suas aulas sobre as relações espaciais.

Os objetos do conhecimento e os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, descritos no Currículo da Cidade - Matemática, exploram essas três competências que vão se ampliando ano a ano, ciclo a ciclo, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental.

O trabalho com representações envolve, ainda, "o tamanho do espaço". Galvez (1996) estabelece três tipos de espaço: micro espaço, meso espaço e macro espaço. Denomina micro espaço aquele em que o sujeito pode contemplar, de uma só vista, o espaço em sua totalidade, por exemplo, uma folha de caderno, a tela do computador, a mesa de trabalho, uma folha de sulfite, etc. Meso espaço é a porção do espaço físico que exige pequenos deslocamentos ou mais de um ponto de vista para ser visto em sua totalidade, por exemplo, a sala de aula, o pátio da escola, a biblioteca etc. Macro espaço é aquele em que é impossível obter uma percepção direta em sua totalidade, mesmo com pequenos deslocamentos ou pontos de vista, como o bairro, a cidade, o quarteirão da escola.

Consideramos que os diferentes "tamanhos" do espaço requerem diversos tipos de procedimentos e modos de relacionar os objetos presentes naquela parte do espaço, ou seja, os diferentes "tamanhos" de espaço implicam em usar modelos conceituais diferentes para orientar as ações do sujeito. Na didática da Matemática, o "tamanho" do espaço pode ser considerado uma variável didática e pode orientar o professor em suas tomadas de decisão em relação ao espaço a ser explorado.

Com o objetivo de identificar as hipóteses sobre a construção das relações espaciais, neste texto, analisamos as representações gráficas construídas por crianças de 8 ou 9 anos de uma escola da Rede Municipal de São Paulo em 2014.

Você já parou para refletir acerca das hipóteses que os estudantes constroem sobre as relações espaciais? Como eles pensam e concebem o espaço?

Para que as crianças e adolescentes avancem nas suas hipóteses com relação à construção do espaço, é necessário que o professor tenha aportes teóricos que lhes deem condições de analisar suas representações espaciais e de fazer intervenções necessárias para que avancem em suas construções. Por esse motivo, passamos a apresentar teóricos que poderão ajudar os professores na sua tarefa de trabalhar com as relações espaciais.

Algumas contribuições teóricas

Os estágios do desenho definidos por Luquet (1927) permitem ao professor analisar as representações espaciais construídas pelas crianças. São eles: realismo fortuito, realismo falhado ou incapacidade sintética, realismo intelectual e realismo visual. Piaget e Inhelder (1993) adotaram os estágios do desenho definidos por Luquet (1927), por considerar em que eles revelam uma notável convergência com a evolução mental e a geometria espontânea da criança.

Atualmente, estudos de Clements e Sarama (2000) afirmam que os estágios do pensamento geométrico e as etapas da aquisição da noção espacial não são rígidos. Por isso, nos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental (Alfabetização e Interdisciplinar), o professor pode encontrar nas representações dos estudantes todas as características gráficas descritas por Luquet (1927), ou seja, os professores podem encontrar nos desenhos das crianças traços referentes ao realismo falhado, realismo intelectual e realismo visual.

Luquet (1927) baseia-se no que denomina de realismo para analisar o desenho da criança. O autor refere-se a realismo como a qualidade do desenho ser análoga a um objeto, está atrelada ao conceito de "compreensão" das características gerais do "objeto". Segundo o autor, há duas espécies de desenho: o figurativo e o desenho não figurativo, ou em um sentido mais amplo, o geométrico. É a esse segundo tipo de desenho que este texto vai se ater.

Realismo Fortuito

Essa fase do desenho infantil, denominada por Luquet (1927) como realismo fortuito, é caracterizada pelo desenho involuntário e pelo fato de a criança verificar que seu traçado produz acidentalmente uma similaridade com um objeto que tenha a intenção de desenhar.

A criança, produzindo um desenho, pode encontrar ocasionalmente similaridades entre seu desenho e os objetos que estaria desenhando, outras vezes não. Muitas vezes, a criança tem a intenção de desenhar um barco, por exemplo e, ao final do desenho, relaciona seu traçado com uma casa, interpretando aquele desenho como o desenho de uma casa. Às vezes, ela faz o traçado do barco e relaciona-o com esse objeto, interpretando a sua representação como um barco. A partir de várias tentativas, a habilidade gráfica da criança vai melhorando e ela começa a relacionar seu desenho com o objeto que tinha a intenção de desenhar.

Realismo Falhado

Aos poucos, o desenho involuntário característico do realismo fortuito é substituído pelo desenho voluntário característico do realismo falhado.

Segundo Luquet (1927), é nesse estágio que as crianças dão detalhes ao desenho que, para elas, naquele momento, são importantes. Afirma que, nesta fase, somente estão preocupadas em representar cada um dos objetos de forma diferente, não integrando os objetos que compõem o espaço em sua totalidade. Para Piaget e Inhelder (1993) é neste estágio que as crianças iniciam a representação do espaço por meio das relações topológicas, ou seja, das propriedades gerais dos objetos como: vizinhança, separação, continuidade e descontinuidade.

Segundo Luquet (1927), uma vez que a criança se propõe a desenhar, sua intenção é que seja realista, mas não chega a ser. A criança encontra alguns obstáculos. O primeiro é de ordem puramente física, pois ainda não consegue controlar plenamente os seus movimentos gráficos. Outro se refere à limitação da sua atenção. Para o autor, isso explica por que, nos seus primeiros desenhos, a criança reproduz um número muito restrito de elementos do objeto ou do espaço representado. Isto não quer dizer que a criança ignore a existência dos pormenores que não representa, pois, quando enuncia verbalmente sua representação, afirma que inicia um desenho com intenção de representação de todos os pormenores que pensa, mas que, por causa dos obstáculos gráficos, essa intenção se enfraquece rapidamente. A criança não dá conta de aplicar simultaneamente no seu desenho um duplo fim: pensar no que é preciso representar e cuidar dos movimentos gráficos, necessários para sua representação. Uma característica fundamental da fase do realismo falhado é denominada de incapacidade sintética, que é uma "imperfeição do desenho", seja nas proporções, nas relações entre os elementos ou pela falta de orientação (LUQUET, 1927, p. 150). "A criança não chega a sintetizar num conjunto coerente dos diferentes pormenores que desenha, pois tem a preocupação exclusiva de os representar cada um por si" (LUQUET, 1927, p. 223). O processo se manifesta em diversas relações, especialmente nas proporções. No geral, os desenhos mostram a falta de proporção entre os pés e a cabeça de um animal, por exemplo. A falta de proporcionalidade pode resultar no uso inadequado do espaço disponível para o desenho. Luquet (1927) afirma que a falta de capacidade sintética diminui na medida em que a criança fica mais atenta.

Realismo Intelectual

Para Luquet (1927) quando a criança supera a incapacidade sintética, o desenho infantil torna-se plenamente realista, representando os pormenores do objeto ou do espaço. O autor classifica essa fase do desenho como sendo Realismo Intelectual. Ele afirma que "O realismo intelectual traz ao desenho contradições flagrantes com a experiência [...]. Elas escapam à criança porque ela tem a sua atenção totalmente monopolizada pela execução do desenho, durante e depois da execução." (LUQUET, 1927, p. 188).

Afirma ainda o autor que, nesse nível, a criança representa todo o conhecimento que possui do objeto, não só pelo que vê, mas por tudo o que ali existe ou ela sabe que são invisíveis, mas estão em sua mente. Um desenho deve conter todos os elementos reais do objeto, mesmo os que estão invisíveis. O realismo intelectual leva a criança a utilizar diversos processos, criados por ela mesma, para representar o que deseja como descontinuidade, rebatimento, transparência e planificação. No que se refere à transparência, ao representar uma casa, a criança desenha também os móveis que estão dentro, evidenciando elementos não visíveis. Na planificação, a representação do objeto é vista por cima como numa planta baixa. No rebatimento, o objeto é representado de forma rebatida como unido por um eixo. O processo da descontinuidade aparece quando destaca os detalhes separadamente, os quais no objeto real estão integrados. Ela destaca os pormenores de um desenho que na realidade se confundem e se ocultam. A criança desenha, mostrando os dois lados do mesmo objeto, ou seja, rebate os objetos frente a frente, como se estivessem unidos por um eixo. O objeto é representado em projeção no solo, como se fosse visto em linha reta, evidenciando uma "mudança de ponto de vista". Esses processos, às vezes, são usados separadamente e em outras não. A criança pode, por exemplo, planificar uma casa como se estivesse visto de cima, usar o processo de transparência, desenhando uma cama para indicar o quarto, e a mudança de ponto de vista para indicar a garagem que não poderia ser vista de cima, não obedecendo a um único ponto de vista. Às vezes, as crianças costumam nomear os objetos para que não haja dúvidas do que estão representando ou, mesmo, se utilizam de uma legenda.

Realismo Visual

Luquet (1927) aponta que o realismo visual exclui os diferentes processos do desenho impostos pelo realismo intelectual, ou seja, a transparência dá lugar à opacidade, o rebatimento e a mudança de ponto de vista são substituídos pela perspectiva que os equivale no realismo visual, a perspectiva modifica o aspecto que apresenta a linha de um objeto ou de um detalhe visto de frente. Luquet (1927) considera que, nessa fase, a criança se preocupa em representar, no desenho, todos os elementos possíveis que constituem o objeto representado. As crianças misturam pontos de vista para que o outro entenda sua representação e para que ela tenha certeza que sua representação será entendida pelo outro. Costuma-se utilizar de desenhos e legendas para nomear os objetos representados. Luquet (1927) afirma que os progressos gráficos não surgem de uma só vez, pois requerem uma luta contra os hábitos contrários profundamente enraizados em seu modo de desenhar. Segundo o autor, "a fase do realismo visual não se fixa de imediato, podendo o realismo intelectual reaparecer nos desenhos das crianças, e ainda, num mesmo desenho, certas partes são conformes ao realismo intelectual e em outras partes são conformes ao realismo visual" (LUQUET, 1927, p. 191).

Luquet (1927) faz uma distinção importante entre o realismo intelectual e o realismo visual. Ele denomina realismo visual para a representação visual (“daquilo que se vê”) e realismo intelectual (“daquilo que se sabe”) para a representação dos objetos pelo conhecimento. Para o autor, a criança se utiliza desses dois processos para representar graficamente um objeto.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), com o realismo visual as crianças abandonam as relações projetivas e euclidianas[1] como independentes, e passam a construí-las interligadas. Os objetos passam a ser representados de acordo com essa nova perspectiva, e essa nova etapa de construção da representação faz com que haja um aprimoramento de representações gráficas espaciais.

Tanto Piaget e Inhelder (1993), como Luquet (1927), afirmam que a passagem de um nível ao outro exige o abandono de alguns elementos e, nessa passagem, certos aspectos do desenho, como os estágios do realismo e as propriedades do espaço topológico, se conservam e outros não. Os autores confirmam que, seja qual for a idade em que se prolongue o período do desenho infantil para um determinado indivíduo, o seu fim é marcado pela renúncia ao realismo intelectual como modo de representação gráfica, pelo firme propósito de se conformar com a aparência visual, ainda que obstáculos diversos impeçam esta intenção de se realizar plenamente.

Em relação aos estágios do desenho, Luquet (1927) ressalta que as experiências individuais das crianças determinam as especificidades em cada estágio. Ainda segundo o autor, as idades das crianças não interferem diretamente nas fases em que elas se encontram e sim as oportunidades de interações com o objeto de conhecimento. Nesta direção, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do Currículo da Cidade foram construídos de forma que haja a interação do sujeito com o objeto de conhecimento e para que os estudantes possam transitar de um nível para outro na construção das representações do espaço.

Assim, deve ser estimulada a representação de desenhos pelos alunos, ora da sua própria casa, ora do caminho e seus encontros, ou da sua família, animais, viagens feitas, no sentido de irem se tornando costumeiras as representações gráficas de locais, pessoas e objetos.

Faça um resumo das fases do desenho e procure analisar os protocolos dos estudantes apresentados a seguir de acordo com as suas características. Observe também as representações espaciais construídas por seus estudantes e procure analisá-las de acordo com as fases do desenho já estudadas.

1 As relações projetivas permitem a coordenação dos objetos entre si em um dado ponto de vista. As relações euclidianas acontecem simultaneamente às projetivas e têm nelas sua referência. Consideram os deslocamentos, as relações métricas e a colocação dos objetos coordenados entre si em um sistema de coordenadas.

Análise de atividades realizadas por crianças da Rede Municipal de Ensino de São Paulo

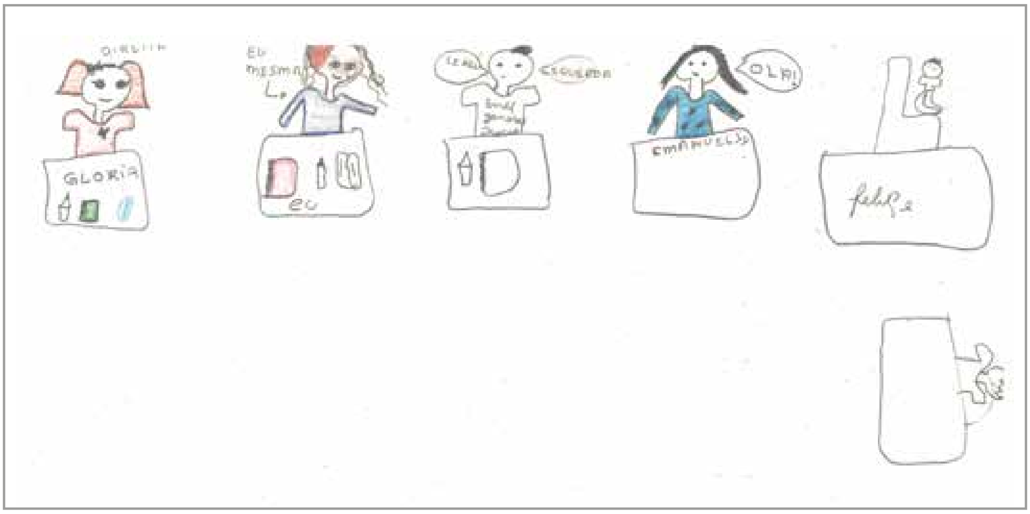
Neste trecho do texto, apesentamos parte da pesquisa desenvolvida por Mariano (2015) com crianças do 3º ano do Ensino Fundamental. As representações gráficas do espaço foram organizadas a partir das fases do desenho descritas por Luquet (1927).

Leia o produto educacional:
Aprendizagens de crianças de terceiro ano do ensino fundamental no que se refere à construção do espaço, suas relações e representações de autoria, de Solange de Fátima Soares Mariano. Disponível em: http://www.cruzeirodosul.edu.br/wp-content/uploads/2016/12/PE_SolangeF%C3%A1timaSoaresMariano-2015-Vpublicada.pdf. Acesso em junho de 2017.

Passamos à análise das representações espaciais a partir do relato de experiência de algumas atividades.

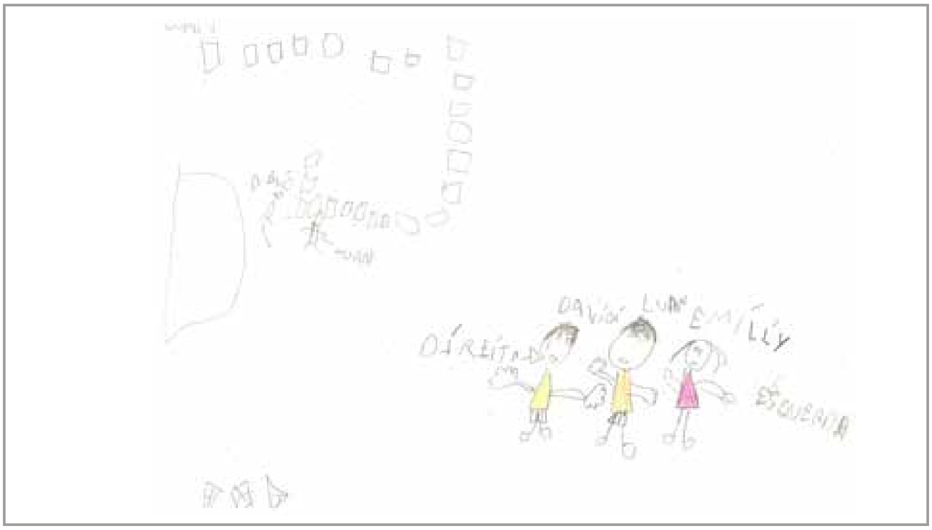
Atividade "Eu me sento aqui!"

Na atividade denominada "Eu me sento aqui", as crianças precisavam desenhar a sala de aula, indicar o local em que se sentavam e que amigos estavam sentados à sua direita e à sua esquerda. O objetivo era que as crianças demonstrassem conceitos adquiridos sobre lateralidade presentes nas relações topológicas. A seguir, mostramos algumas representações gráficas, todas do arquivo pessoal da professora pesquisadora.



Fonte: MARIANO, 2015, p. 19.

Figura 3 - Sobressai o que julga importante, noção de lateralidade.



Fonte: MARIANO, 2015, p. 19.

Figura 4 - Evidênciado percurso e adição de elementos do espaço

Fonte: MARIANO, 2015, p. 20.

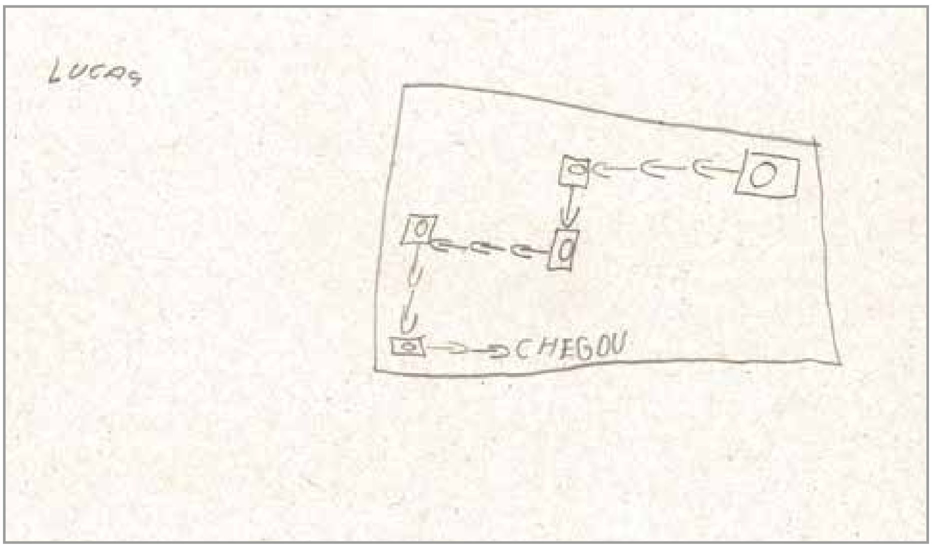
Figura 5 - Exagero de proporcionalidade, noção de lateralidade

Nessas representações, observamos a fase do realismo falhado em que há tentativa de representar a sala de aula, mas, conforme estudos de Luquet (1927), sobressai a importância do que as crianças julgam ser necessário para que compreendam seu desenho. É justamente isso que aparece evidenciado nas figuras 3 e 5 as crianças somente se preocupam em desenhar sua localização e dos amigos. Já na figura 4 a criança até se arrisca a desenhar os elementos contidos nesse espaço como a lousa e carteiras, mas a predominância fica em demonstrar o posicionamento seu e dos amigos. Sobre a questão da relação de lateralidade, as crianças demonstram que construíram conhecimentos e ratificam esses conhecimentos, frisando bem quem está à sua direita e à sua esquerda (figuras 4 e 5). Porém, na figura 5 a criança não conseguiu demonstrar por completo esse conhecimento, o que seria explicado pela negligência de tangência ou de inclusão de elementos que compõem o objeto desenhado (LUQUET, 1927).

Atividade “Mapa do percurso na sala de aula”

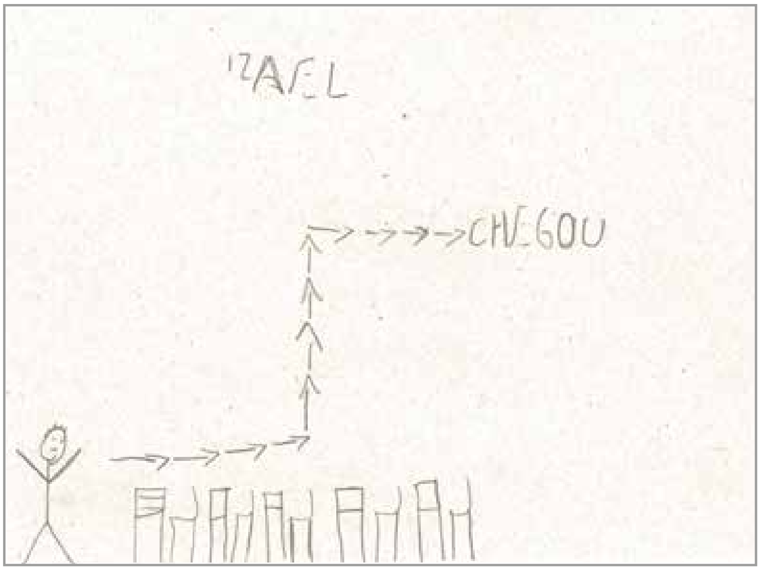
Nesta atividade, após vivenciarem experiências de deslocamentos na sala de aula, as crianças representaram graficamente o espaço. Primeiro foi realizado um diagnóstico para verificar se a turma sabia seguir instruções e conhecia o vocabulário apropriado para localização e movimentação espacial. A atividade tinha as seguintes instruções: a partir do lugar que você senta, ande 3 passos em frente, vire à direita e siga 2 passos, vire à esquerda e siga um passo, ande em frente mais um passo. Marque o ponto que chegou. Depois de identificar os conhecimentos prévios e fazer intervenções, foi solicitado que uma criança fizesse a comanda de um percurso na sala de aula e outra realizasse esse trajeto. Essa vivência foi repetida algumas vezes e depois as crianças desenharam o último trajeto realizado na sala.

Quando os desenhos ficaram prontos, foram socializados com objetivo de verificar se as crianças observaram a comanda e se fizeram o trajeto com algum tipo de orientação, símbolo, setas que indicassem a comanda recebida. Vejamos algumas representações do Arquivo da professora pesquisadora Solange de Fátima Soares Mariano:



Fonte: MARIANO, 2015, p. 14.

Figura 6 - Evidência de percurso



Fonte: MARIANO, 2015, p. 14.

Figura 7 - Evidência do percurso e adição de pormenores

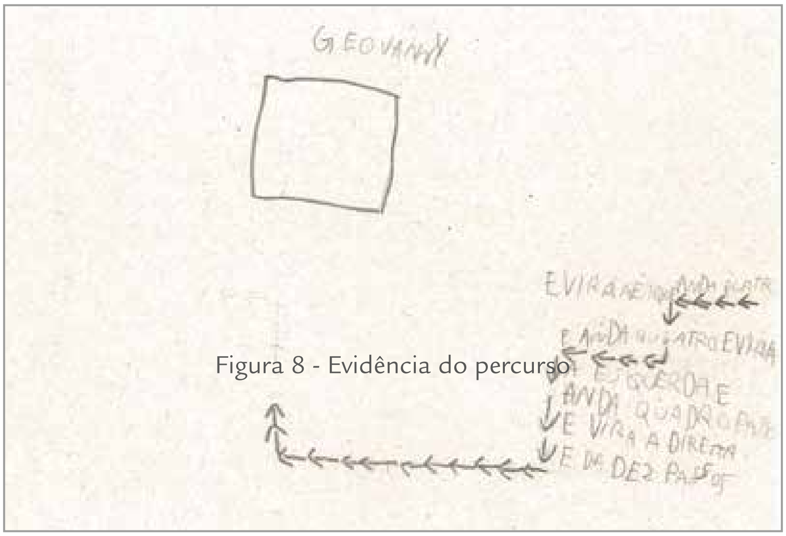
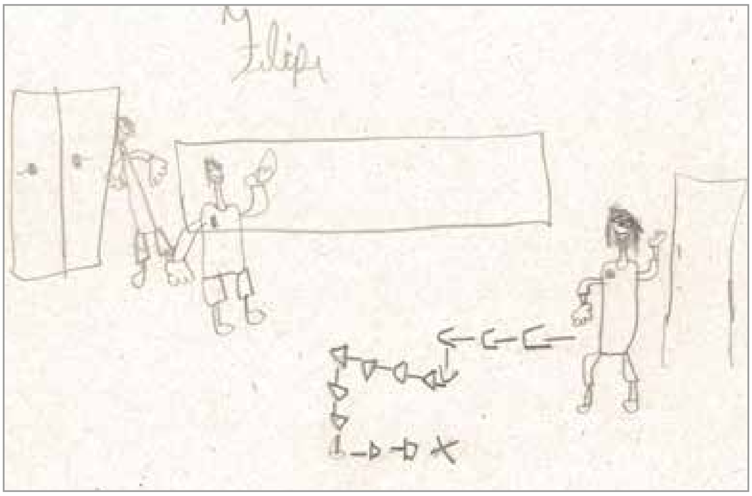


Figura 8 - Evidência do percurso

Fonte: MARIANO, 2015, p. 14.

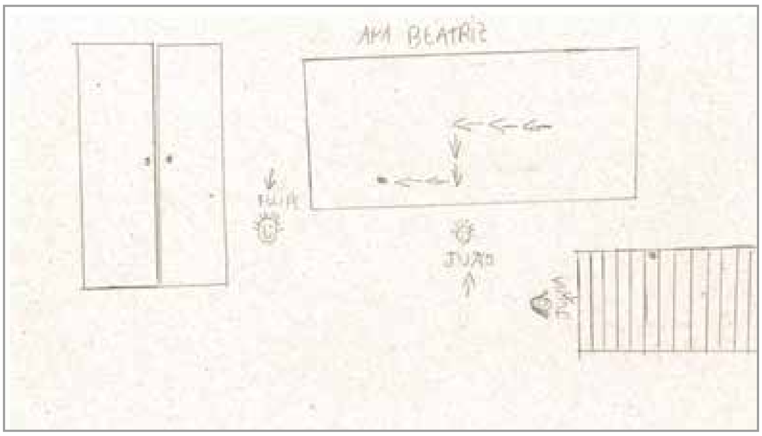
Figura 8 - Evidência do percurso

Nas representações, percebe-se o que Luquet (1927) denomina de realismo falhado. Ele afirma que a criança desenha somente o que julga ser mais importante. Piaget e Inhelder (1993) entendem, por Relações Topológicas, as primeiras relações construídas pela criança que dizem respeito às características dos objetos em si mesmos, utilizando seu próprio corpo como referência, revelando suas relações. Nos desenhos, as crianças evidenciam o percurso realizado, utilizando setas e legendas para marcar o trajeto. Elas não registraram outros elementos que compõem o espaço da sala de aula, evidenciando características dessa fase. Observamos algumas relações topológicas: a relação topológica de vizinhança, presente em todos os desenhos, pois os elementos desenhados estão próximos uns dos outros. Outra relação topológica presente é de separação. Observamos que as crianças representam, de forma distinta, alguns elementos do espaço, como a porta, as carteiras etc. A Relação de vizinhança é a mais elementar. Envolve a proximidade entre os elementos de um determinado campo de observação, ou seja, o espaço e os elementos que o constitui são observados de maneira uniforme. A Relação de separação se revela quando as representações dos elementos do espaço são feitas de forma distinta. Cabe observar, nos desenhos do arquivo da Professora Solange F. S. Mariano, a relação de ordem nos elementos.



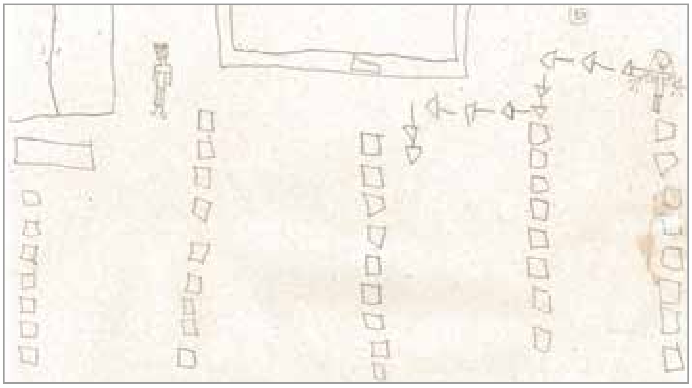
Fonte: MARIANO, 2015, p. 22.

Figura 9 - Exagero de proporcionalidade, noção de lateralidade



Fonte: MARIANO, 2015, p. 23.

Figura 10 - Processo de rebatimento dos elementos da sala



Fonte: MARIANO, 2015, p. 23.

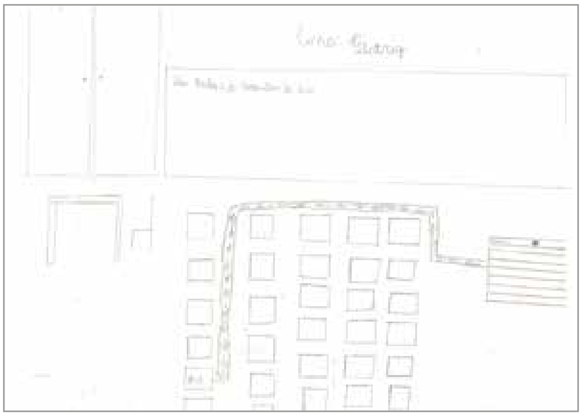
Figura 11 - Início da representação espaço geométrico

Um aspecto do realismo intelectual que aparece na figura 10 é o processo de rebatimento, a criança desenha a porta em uma posição horizontal da linha do chão.

Na figura 10, além de as crianças desenharem aspectos do estágio anterior destacando o trajeto realizado, observamos um avanço nesses desenhos, visto que as crianças representam mais objetos que compõem o espaço da sala de aula. Em relação à representação do espaço, ainda predomina a representação do espaço topológico, mas observamos que algumas crianças iniciam a representação do espaço como a projeção de um mapa, o que pode ser observado na figura 11.

Na representação do espaço, observamos a estruturação do espaço topológico. Essas representações mostram um avanço na distribuição geométrica do espaço, ou seja, as relações que prevalecem são projetivas e euclidianas, na perspectiva de Piaget e Inhelder (1993). A perspectiva modifica o aspecto que apresenta a linha de um objeto ou de um pormenor visto de frente, como nas figuras 12 e 13 do arquivo da Professora Solange F. S. Mariano.

Na figura 12 os objetos passaram a ser representados de acordo com essa nova construção do espaço.



Fonte: MARIANO, 2015, p. 30.

Figura 12 - Represetação de elementos de uma só face

Na figura 13, a perspectiva e os detalhes particularizam as formas dos objetos que antes eram genéricos.

Fonte: MARIANO, 2015, p. 30.

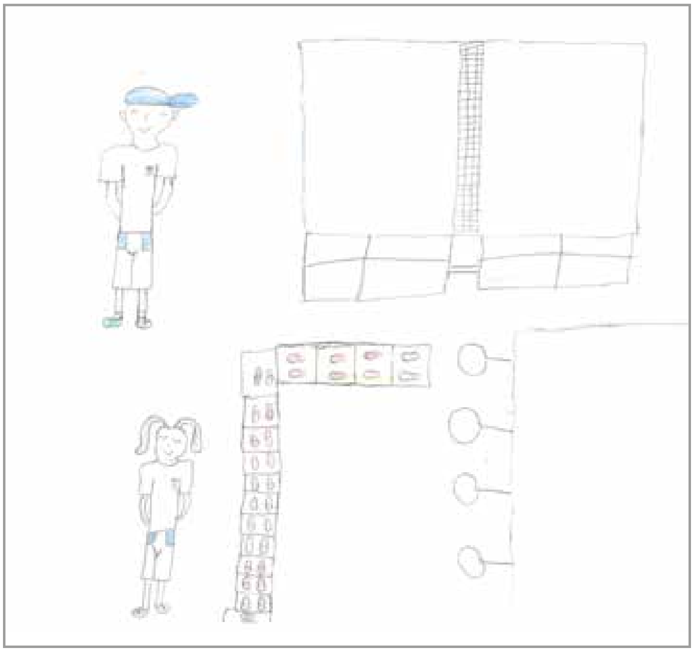
Figura 13 - Distribuição geométrica dos elementos da sala

Passamos à análise das representações espaciais a partir do relato de experiência de algumas atividades.

Pense numa atividade semelhante, considerando os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento previstos no Currículo da Cidade para o ano de escolarização que você atua.

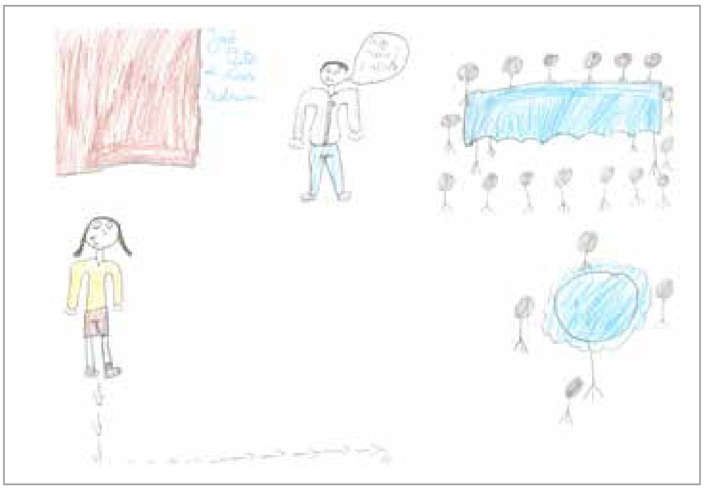
Atividade "O robô esperto!"

Esta atividade foi realizada no pátio da escola e teve como objetivo que as crianças utilizassem quadriculados para fazer movimentações, usando terminologia própria – direita, esquerda, à frente, atrás. Para tanto, foi desenhado um quadriculado grande no pátio da escola. Duas crianças eram indicadas, uma seria o robô e dava as comandas e a outra fazia o percurso no quadriculado. A atividade destacada para este texto envolve o desenho do último trajeto feito pelas crianças, indicando com símbolos, setas ou legendas, se necessário. Ela faz parte do arquivo da professora Solange F. S. Mariano. Nas figuras 14 e 15 a seguir, as crianças se utilizam de processos variados em um mesmo desenho, o que Luquet (1927) denomina de mudança de ponto de vista, por exemplo, a combinação do rebatimento com o plano. Na figura 15, a criança destaca o trajeto numa posição longitudinal em relação aos elementos do espaço.



Fonte: MARIANO, 2015, p. 26.

Figura 14 - Desenho com mudança de ponto de vista



Fonte: MARIANO, 2015, p. 26.

Figura 15 - Desenho com noção de profundidade, simetria e lateralidade

Nas figuras 16, 17 e 18, do arquivo da professora Solange F. S. Mariano, as crianças representadas nos desenhos aparecem em segundo plano, característica do realismo intelectual. Observamos que, em todos os desenhos as crianças representam o quadriculado do chão. Fica evidenciado que prevalece aquilo que elas estão vendo - “o visto” para essas representações.

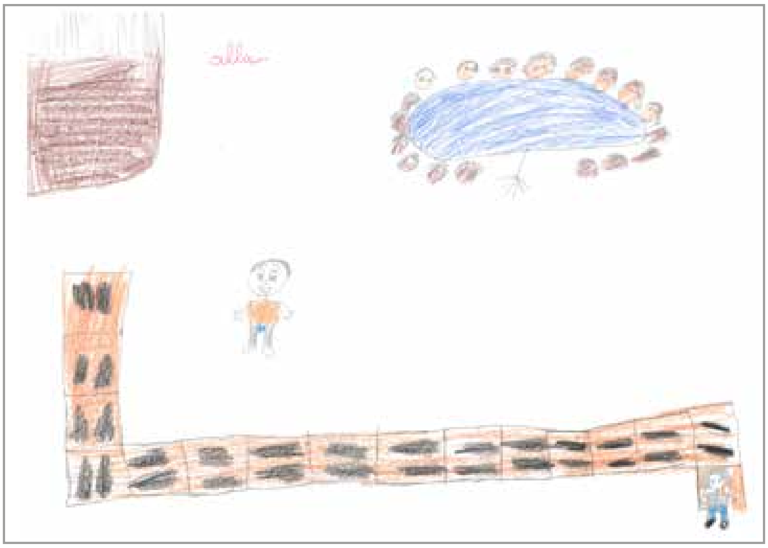
Nesses desenhos, as crianças destacam o trajeto realizado, usando pontos de referência para marcar seu início, destacam que teriam que andar em um espaço determinado para que o trajeto fosse cumprido. Aparece também a noção de profundidade, como na figura 18.

Fonte: MARIANO, 2015, p. 26.

Figura 16 - Prevalece o visto do Espaço

Fonte: MARIANO, 2015, p. 27.

Figura 17 - Elementos desenhados em segundo plano

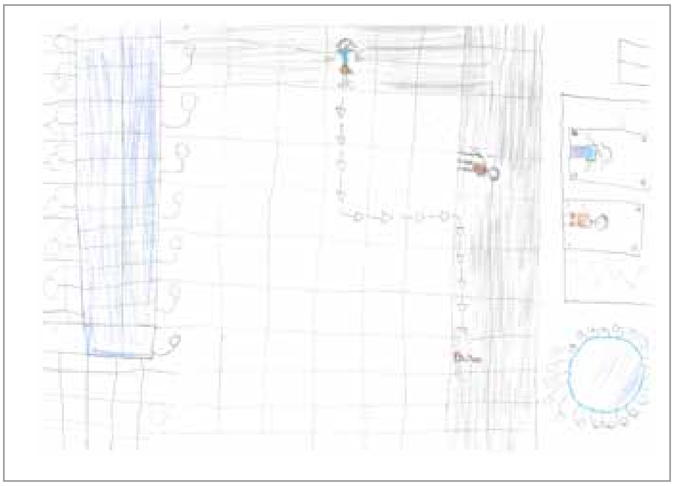


Fonte: MARIANO, 2015, p. 30.

Figura 18 - Destaque para o percurso, noção de profundidade

Com a análise dessas representações, é possível considerar que, a partir da diferenciação e da coordenação entre as representações das formas e das relações espaciais que as estruturam, a criança avança na construção do espaço.

Mostramos a seguir uma representação por nós categorizada como sendo do estágio realismo visual. Observamos que os desenhos das crianças evidenciam o estágio do realismo visual, apresentando um abandono das características de transparência, legendas e descontinuidade, ou seja, a transparência dá lugar à opacidade, representando somente os elementos visíveis do objeto. Os pontos de vista se coordenam, dando início ao processo de perspectiva.



Fonte: MARIANO, 2015, p. 29.

Figura 19 - Opacidade nas formas, proporção dos elementos

Observamos que em todos os desenhos se confirmou o que Piaget e Inhelder (1993) afirmam sobre a evolução da criança em representar graficamente o espaço. Essa representação não acrescenta novos conhecimentos, mas é fruto de uma reconstrução dos conhecimentos dos níveis anteriores.

Da mesma forma que os estudantes constróem hipóteses sobre as escritas numéricas, sobre procedimentos pessoais na resolução de problemas do campo aditivo e multiplicativo, e ainda sobre procedimentos de cálculo, eles também constróem hipóteses sobre o espaço que os rodeiam. A compreensão do pensamento dos estudantes, ao desenvolverem atividades de relações espaciais e a discussão de seus procedimentos, permite avanços nas suas aprendizagens e também nas práticas do professor. A apropriação de estudos teóricos proporciona ao professor maior segurança em desenvolver trabalhos com temas pouco explorados. Faça uma análise da abordagem que este texto apresenta sobre a construção das noções espaciais pelas crianças.

Podemos concluir que o avanço das crianças nas aquisições das relações espaciais se dá de maneira complexa e não linear. Como os autores Luquet (1927), Piaget e Inhelder (1993) convencionam que a construção de conhecimentos sobre o espaço é resultante da atividade direta do sujeito sobre o objeto estudado. Saber analisar as representações gráficas dos estudantes pode auxiliar o professor a realizar atividades que os façam avançar em suas relações espaciais.

Leia o artigo de Vece e Curi (2016) “Representação gráfica do espaço de alunos do 1° e do 5° ano do Ensino Fundamental: por que, o que e como analisar?”. Disponível em: http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2201. Acesso 03 dez. 2017

Figuras geométricas espaciais

Introdução

Nos últimos anos, no Brasil e no mundo, vem acontecendo um crescente movimento de renovação sobre o ensino de Geometria nos currículos de Matemática. Desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), publicados em 1997, já havia indicações para a justificativa de inclusão deste conteúdo no currículo, por possibilitar o desenvolvimento de um tipo de pensamento especial por parte do estudante, determinante para compreender, descrever e representar ou situar-se no mundo real.

Para você, qual a importância do ensino de geometria com enfoque nas figuras geométricas espaciais?

Justifica-se o ensino de Geometria desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, porque ela permite o desenvolvimento de um tipo de pensamento que os números e a álgebra não possibilitam, ou seja, o ensino da Geometria proporciona uma interpretação e uma compreensão organizada do mundo real e uma visão mais abrangente da Matemática.

Mas por que será que a geometria é pouco explorada nas aulas de Matemática?

Reflita sobre essa problemática e continue a leitura do texto.

Ao que parece, a ausência do ensino de Geometria é um problema histórico. Pavanello (1989), em seu trabalho de mestrado, fez uma análise de currículos e programas escolares, observando que, nos primeiros anos da educação básica, os conteúdos trabalhados em Matemática eram predominantemente ligados à aritmética, enquanto os conteúdos dos anos finais do Ensino Fundamental eram predominantemente referentes à Álgebra.

Muitos pesquisadores apontam que, ao longo das décadas de 1960 e 1970, o ensino de Matemática foi influenciado pelo movimento Matemática Moderna, que focalizava o ensino a partir da noção de conjunto e na simbologia ($\in$, $\subset$, $<$, $>$ etc.). Nessas décadas, havia pouca ênfase para o ensino de geometria. As noções de ponto, reta e plano eram tratadas dentro do quadro da teoria dos conjuntos (o ponto pertence à reta, a reta está contida no plano etc.) e não como elementos geométricos. Também o trabalho com medidas era pouco enfatizado.

A partir da década de 1980, as propostas de trabalho com geometria eram apoiadas em atividades em que as crianças exploravam figuras planas e espaciais, envolvendo composição, decomposição, simetrias, ampliações e reduções.

Os documentos curriculares mais atuais, como o documento Orientações Curriculares e Proposição de Expectativas de Aprendizagem (2007), focalizam o trabalho com relações espaciais e com figuras geométricas espaciais e planas. Esses documentos destacam que o trabalho com geometria contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois incentiva o estudante a observar e a perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. Além disso, sugerem que esse trabalho seja feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, pois isso possibilita estabelecer conexões intramatemáticas (internas à Matemática) e extramatemáticas (com outras áreas do conhecimento).

Atualmente, o enfoque dado ao ensino de geometria envolve as noções espaciais e o estudo das figuras geométricas, tanto com relação às suas características e propriedades como às suas medidas.

As contribuições da etnomatemática também trouxeram à baila a importância da geometria como modo de interpretar o mundo e perceber as múltiplas leituras do espaço não advindas apenas da geometria grega.

Alsina, Burguês e Fortuny (1987) apresentam três enfoques possíveis para o ensino de geometria:

A análise figurativa, que apresenta o estudo dos objetos, com foco nas figuras e suas propriedades, independente do seu tamanho ou de outra qualidade.

A análise qualitativa, caracterizada pelo estudo de um objeto, centrando em suas medidas e seus cálculos.

A análise estrutural cujo foco é a estrutura formal do objeto, com análise das relações topológicas, projetivas e euclidianas. Leva em conta a equivalência das figuras dependendo do tipo de transformação geométrica permitida e o estudo das propriedades variantes das figuras.

O Currículo da Cidade aponta, nos seus objetivos de aprendizagem e desenvolvimento o enfoque para a análise figurativa com estudo de figuras e suas propriedades independentemente das medidas, como os da análise qualitativa no estudo das medidas das figuras e da análise estrutural, levando em conta a equivalência de figuras e as transformações geométricas.

Neste texto, abordaremos alguns autores que propõem o trabalho com as figuras espaciais, bem como outros que discutem o ensino dessas figuras.

Recuperando alguns aspectos matemáticos das figuras geométricas espaciais

Você sabe classificar as figuras geométricas espaciais de acordo com as suas características?

As figuras geométricas espaciais podem ser organizadas em dois grupos: (prismas, pirâmides e outros) e corpos redondos (cones, cilindros e esferas). Quando as figuras geométricas espaciais **não são** ocas, são denominadas de **sólidos geométricos**. Iniciamos com a apresentação de algumas características dos poliedros.

Um **poliedro** é uma figura geométrica espacial limitada por um mesmo conjunto finito de polígonos, que são denominados **faces**.

Cada lado de um polígono desse conjunto coincide com um lado de outro polígono (PIRES; CURI; CAMPOS, 2012, p.93-94). Os lados desses polígonos que se encontram se constituem as **arestas** dos poliedros. A aresta de um poliedro é um segmento que se origina quando as faces do poliedro se juntam. Os vértices dos polígonos também são os vértices do poliedro composto por eles. O vértice de um poliedro é um ponto no qual mais de duas arestas e mais de duas faces se juntam (PIRES, CURI E CAMPOS, 2012, p.94).

Os poliedros são convexos, se tiverem as seguintes características:

- Duas faces distintas não pertencem ao mesmo plano;
- Cada aresta pertence apenas a duas faces,
- As faces são formadas por polígonos planos,
- O plano de cada face deixa o poliedro todo em um mesmo semiespaço.

Os Poliedros de Platão possuem características próprias e obedecem as seguintes condições:

O número de arestas é igual em todas as faces,

Em cada vértice incide o mesmo número de arestas,

Vale a relação de Euler: $V + F = A + 2$

O paralelepípedo é um poliedro de Platão, pois as 6 faces são quadriláteros em que o número de arestas é igual a 4 em todas as seis faces. De cada vértice, partem sempre 3 arestas. A relação de Euler é válida: $8 + 6 = 12 + 2$ (14).

São Poliedros de Platão as seguintes classes de Poliedros: tetraedro (4 faces), hexaedro (6 faces), octaedro (8 faces), dodecaedro (12 faces), icosaedro (20 faces).

Platão estabeleceu algumas relações ente as classes de poliedros e o Universo.

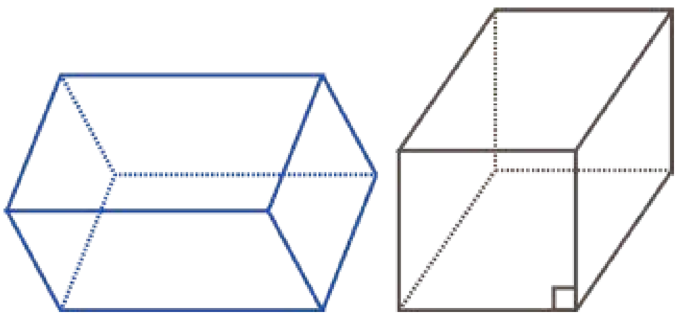
Um poliedro é considerado regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes e todos os seus vértices incidem o mesmo número de arestas. A partir da existência dessas características, o paralelepípedo, que é um poliedro de Platão, não é um poliedro regular, pois suas faces não são polígonos regulares e congruentes. O cubo é regular, pois é composto de 6 faces quadradas e congruentes e de cada vértice incidem 3 arestas. Assim é possível afirmar que todo Poliedro Regular é um Poliedro de Platão e que um Poliedro de Platão nem sempre é um Poliedro Regular.

Os poliedros podem ser divididos em três conjuntos: prismas, pirâmides e outros poliedros.

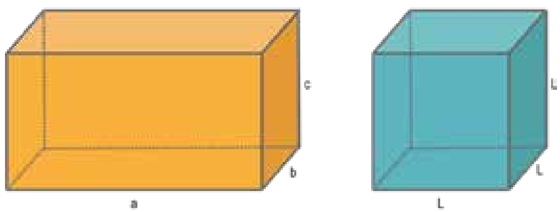
A seguir, apresentamos algumas características dos prismas.

Prismas

Os prismas são poliedros que apresentam, pelo menos, duas faces paralelas e congruentes (mesma forma e mesmo tamanho), chamados de bases. Suas faces laterais são sempre paralelogramos que podem ser retângulos, quadrados, entre outros. Os prismas são nomeados de acordo com o formato das suas bases.



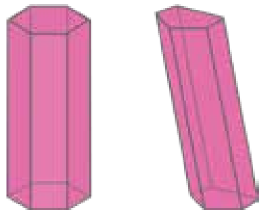
Se as bases têm o formato de um paralelogramo, o prisma chama-se paralelepípedo. Quando todas as faces de um paralelepípedo são retangulares, temos um paralelepípedo retângulo. Se as faces são quadradas, temos um cubo ou hexaedro regular (PIRES; CURI; CAMPOS, 2012, p. 96).



Bloco retangular

Cubo

Um prisma pode ser reto ou oblíquo, ou seja, conforme as faces laterais sejam perpendiculares ou não às bases. No prisma reto, as arestas laterais são perpendiculares às bases e as faces laterais são retângulos.

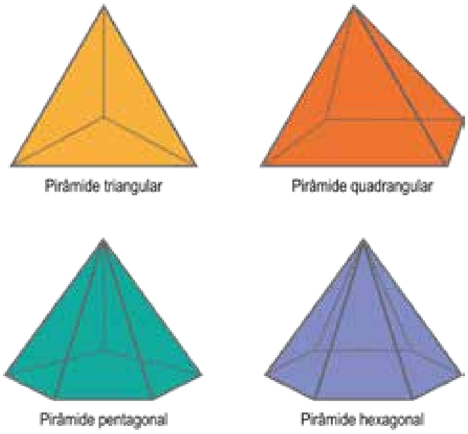


Prisma reto Prisma oblíquo

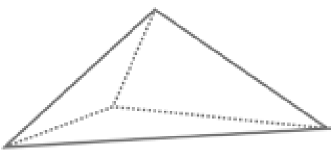
No próximo item, apresentamos algumas características das pirâmides.

Pirâmides

As pirâmides são poliedros em que as faces laterais são todas triangulares e têm um vértice em comum. A face identificada como base pode ser um polígono de qualquer formato. A pirâmide é nomeada de acordo com o formato de sua base.



Uma pirâmide particular é o tetraedro regular em que as 4 faces são triângulos equiláteros.



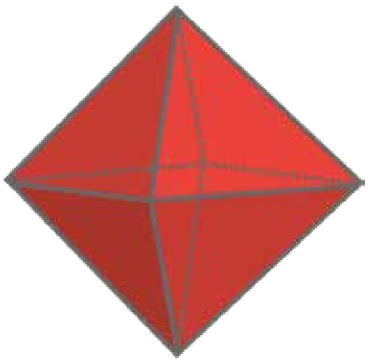
Tetraedro

O tetraedro regular é formado por quatro triângulos equiláteros (que possuem lados e ângulos com medidas iguais). Possui 4 vértices, 4 faces e 6 arestas. É um caso particular de pirâmide regular de base triangular.

O terceiro conjunto agrega vários tipos de poliedros que não são nem prismas e nem pirâmides, com características diferentes. Denominamos de “outros poliedros”.

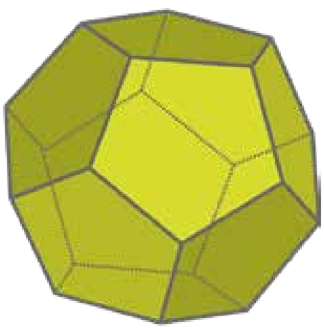
Outros poliedros

Há poliedros que não são nem prismas nem pirâmides, por exemplo, o octaedro, que possui 8 faces, reunindo duas pirâmides idênticas, com base comum.

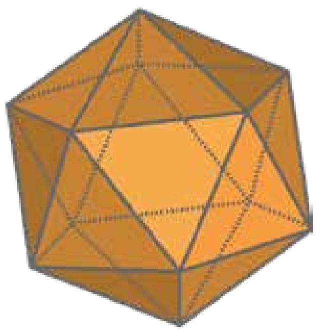


Octaedro

Existem também o dodecaedro que é formado por 12 faces e o icosaedro formado por 20 faces.

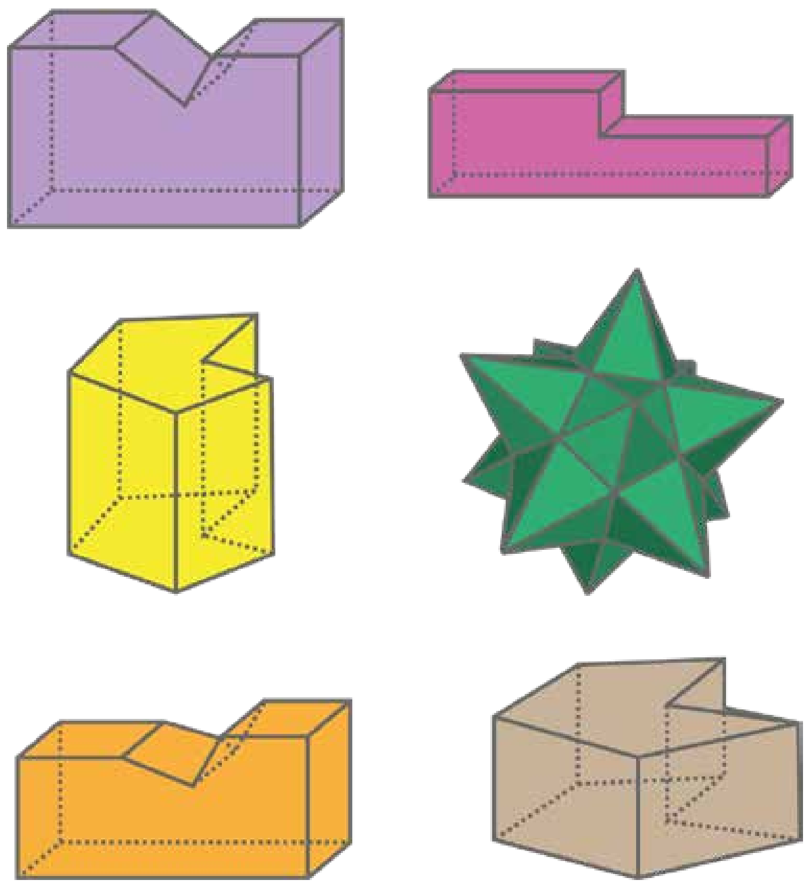


Dodecaedro



Icosaedro

Há ainda, nesse conjunto, outros tipos de poliedros.



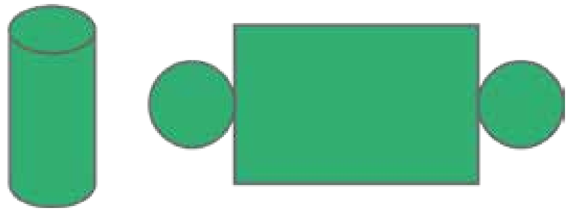
Passamos agora a apresentar as características dos corpos redondos.

Corpos redondos

Há objetos que são limitados por uma superfície arredondada, como a esfera e os que são limitados por superfícies arredondadas e planas, como o cone e o cilindro. A esfera, o cilindro e o cone podem ser gerados, respectivamente, pelo movimento de um semicírculo, de um retângulo e de um retângulo em torno de um eixo respectivamente. Por isso, são conhecidos como sólidos de revolução. A esfera não pode ser planificada.

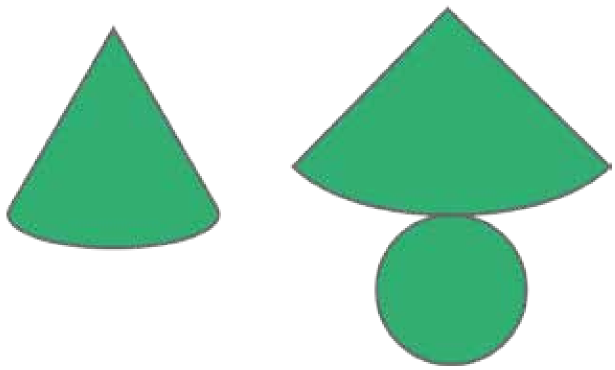
Cilindro

No cotidiano das pessoas, é comum encontrarmos objetos parecidos com a figura do cilindro: latas de molho e latas de milho têm essa forma. Abrindo e planificando um cilindro, é possível observar que sua superfície é formada por dois círculos (as bases) e por um retângulo (a superfície lateral).



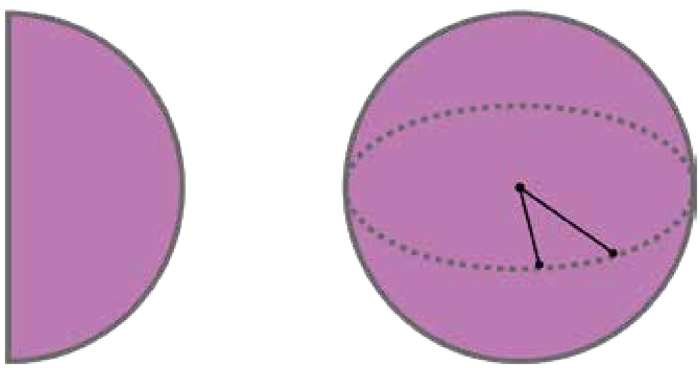
Cone

O cone é composto por uma base circular. A planificação do cone revela que sua superfície é composta por um círculo (base) e por um setor circular (superfície lateral).



Esfera

A esfera pode ser definida pelo movimento de 360° de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro. A imagem a seguir mostra, à esquerda, uma semicircunferência e seu diâmetro e, à direita, mostra a esfera resultante do giro.



Se os estudantes estão imersos em um espaço permeado por formas geométricas espaciais, o que justifica o ensino de geometria focado nas figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo...)?

Reflita sobre essa questão e continue a leitura do texto que apresenta indicativos sobre o pensamento dos estudantes a respeito das figuras geométricas espaciais.

Diagnóstico sobre os conhecimentos das figuras geométricas

Você já percebeu "se e como" as crianças, mesmo sem frequentar a escola, reconhecem formas geométricas em objetos do cotidiano, percebem as "que rolam" com mais facilidade e as que são mais "estanques"? Percebem as que são "pontudas" e as que são "arredondadas"?

Após essa reflexão, continue lendo o texto, focalizando os estudos de Clements e Sarama (2000). Eles darão suporte teórico para essa e outras percepções que surgirem de sua experiência.

Clements e Sarama (2000), a partir de entrevistas realizadas com crianças de 6 a 10 anos, destacam três níveis de conhecimento geométrico: pré-reconhecimento, visual e descritivo.

O nível de pré-reconhecimento é perceptível. As crianças percebem formas, mas não são capazes de identificar e distinguir uma entre várias formas. Muitas vezes, desenham uma mesma curva irregular para representar círculos, quadrados ou triângulos.

No segundo nível, visual, as crianças identificam formas de acordo com o seu aspecto e acabam, relacionando a forma a um objeto conhecido, por exemplo, uma esfera parece com uma bola de futebol.

É só no nível descritivo que as crianças reconhecem e podem caracterizar as formas pelas suas propriedades, ou seja, nesse nível as crianças identificam que um cubo tem 6 faces quadradas.

Clements e Sarama (2000) destacam que o progresso dos níveis infantis de pensamento depende de seu ensino e de suas experiências. Afirmam ainda que esses níveis podem ajudar o professor a compreender como as crianças entendem as figuras geométricas e orientá-lo no fornecimento de pistas para o processo de aprendizagem das crianças.

Os autores, após realizarem pesquisas entrevistando 128 crianças, com idades entre 3 a 6 anos, concluíram que elas identificam formas desenhadas em papel e cortadas em madeira. Apontam que as crianças constróem ideias sobre formas comuns - como círculos, quadrados, triângulos e retângulos, mesmo antes de entrar na escola, por meio da exploração de brinquedos, livros e programas de televisão com os quais entram em contato no dia a dia. Mas afirmam que isso não é suficiente, que é preciso que o professor as ajude a ampliar suas ideias iniciais. Sugerem que os professores entrevistem seus alunos para um diagnóstico que possibilite uma visão mais clara da compreensão das crianças sobre as figuras geométricas, ao invés de confiar apenas no trabalho escrito e nas avaliações.

Pense em um diagnóstico para seus estudantes que possibilite identificar o que já conhecem sobre as figuras geométricas espaciais e prepare uma possível intervenção. As contribuições teóricas apresentadas a seguir auxiliam no desenvolvimento desta atividade.

Algumas contribuições teóricas para o ensino

Uma pesquisa importante, que discute o pensamento geométrico é a do casal Van Hiele (2002), que se baseou no pressuposto de que o pensamento geométrico ocorre em níveis graduais, conforme a complexidade. O modelo propõe cinco níveis: 1) visualização, 2) análise, 3) dedução informal, 4) dedução, 5) nível de rigor.

O primeiro nível, **visualização**, compreende o reconhecimento das figuras pela imagem, independentemente das propriedades geométricas delineadas. Há, nesse nível, o reconhecimento das figuras por parte do estudante, sendo possível a sua reprodução pelas formas, apropriação do vocabulário básico geométrico e terminologias das formas específicas, como exemplo podemos citar o espaço de casa reconhecido pelo estudante, a porta possui similaridade com o retângulo, em razão da aparência.

O segundo nível, **análise**, propõe o reconhecimento das figuras geométricas por suas partes e propriedades, a partir das atividades empíricas. A caracterização é possível mediante a observação e a experimentação, todavia, não há a possibilidade de estabelecer a relação entre as figuras e suas definições.

Em relação ao terceiro nível, **dedução informal**, o estudante inicia o processo de associação das figuras pelas relações de propriedades. Nesse nível, o estudante precisa de uma definição para evoluir nos conceitos geométricos.

No nível de **dedução**, há o entendimento da inter-relação de propriedades entre as figuras geométricas e a construção de demonstrações. Esse nível propõe o processo dedutivo.

Por fim, no nível **rigor**, a geometria é compreendida no plano abstrato, sem a necessidade do uso de materiais concretos.

Nasser (1991) acentua que os níveis traçados no modelo de Van Hiele (2002) podem transcorrer simultaneamente. Todavia, o último nível, denominado “rigor”, deve ser utilizado após o desenvolvimento dos antecedentes, substancial para viabilizar as estruturas de aprendizagem.

Segundo Canizares e Serrano (2008 apud ULTIMARA; CURI, 2016, P.45):

> [...] esses níveis se desenvolvem de forma cíclica, de modo que um conceito adquirido em um nível voltará a se desenvolver no nível subsequente, com outra linguagem, outras características, de maneira que os conhecimentos adquiridos anteriormente possam ser retomados no último nível por exemplo. (ULTIMURA; CURI, 2016, p. 45)

Percebe-se a importância dos níveis inferiores, pois constituem a base para a construção dos conceitos nos demais níveis.

Cada nível tem a sua própria linguagem. Assim, mesmo em um conceito que esteja bem definido em um nível, a linguagem pode ser ampliada no nível seguinte. A passagem do Nível 1 para o Nível 2 envolve a transição de uma forma estática de conceitos para uma mais simbólica. As propriedades geométricas podem ser descritas, ampliando os conceitos já existentes. Na passagem do Nível 2 para o Nível 3, o estudante explora e demonstra as propriedades das figuras, sustentado por um sistema lógico e dedutivo. Na passagem do Nível 3 para o Nível 4, o estudante já supera a memorização das demonstrações, atingindo o nível máximo de rigor matemático por meio dos axiomas e teoremas de diferentes figuras geométricas.

Para que a progressão entre os níveis aconteça, conforme se espera, é importante que as estratégias metodológicas, os materiais didáticos, o conteúdo e o vocabulário estejam adequados ao nível do pensamento geométrico que o estudante está. Os estudantes devem estar em contato com aspectos visuais e experimentais para estabelecer as relações da dedução informal. No Ciclo de Alfabetização, os dois primeiros níveis são fundamentais. Uma análise mais aprofundada mostra que os níveis de Van Hiele (2002) podem ser adequados às figuras espaciais, pois apontam para uma aprendizagem prolongada com abordagem intuitiva e experimental do conhecimento das figuras geométricas espaciais, de desenvolvimento de formas elementares do raciocínio geométrico, ligado ao conhecimento de propriedades e elementos das figuras geométricas espaciais e de relações básicas entre elas.

No Currículo da Cidade, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento estão alocados em todos os níveis descritos por Van Hiele (2002), de acordo com o ano de escolaridade. A preocupação do documento foi de uma ampliação dos conhecimentos dos estudantes de ciclo para ciclo e do desenvolvimento do pensamento geométrico.

A progressão dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento por ano e por ciclo corrobora estudos dos pesquisadores portugueses Ponte e Serrazina (2000), discorrendo que, primeiramente, os estudantes reconhecem as figuras geométricas e as identificam, levando em consideração as aparências. Com o tempo, são capazes de diferenciá-las com a averiguação de suas propriedades. Ainda, segundo os autores, o professor deve propiciar, no decorrer do ensino de Geometria, uma abordagem experimental e intuitiva.

É interessante salientar que a transição do nível pré-cognitivo para o nível básico ocorre a partir do momento em que as crianças começam a distinguir as formas geométricas. Desse modo, para ensinar conceitos geométricos, de maneira mais compreensível para a criança, a fim de estabelecer o desenvolvimento do pensamento geométrico, é preciso que o professor tenha tais conceitos desenvolvidos. Além disso, cabe considerar que o professor tenha clareza dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que pretende alcançar e de suas expectativas com relação à aprendizagem dos estudantes.

Há alguns avanços em relação ao modelo Van Hiele. Segundo Pires (2012), esses níveis "não são tão estanques e estão sujeitos a maior ou menor estimulação das crianças por situações que envolvam a experimentação do espaço e das formas geométricas" (PIRES, 2012, p. 194). A autora enfatiza a importância dos estudos de Van Hiele na construção de sequências de ensino que envolvem a Geometria Espacial.

Outro autor, que se refere aos níveis de Van Hiele (2002), é Battista (2007) que destaca ser preciso haver uma transição entre esses níveis, além de colher informações sobre o ponto de partida dos estudantes que podem estar em diferentes níveis para diferentes conceitos.

O modelo Van Hiele (2002) pode colaborar com o professor para o planejamento das aulas, para a seleção de conteúdos e, ainda, auxiliar na identificação das dificuldades dos alunos.

Após a leitura das contribuições teóricas, analise os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para o ciclo em que você atua e verifique se há ampliação dos níveis de pensamento geométrico ano a ano no ciclo.

O conflito do visto e do sabido no desenho de uma pirâmide

Segundo Pires, Curi e Campos (2001), os pesquisadores franceses François Colmez e Bernard Parzysz estudaram a maneira de os estudantes representarem um objeto geométrico por meio de um desenho, buscando organizar a representação e as propriedades que conhecem (o sabido) de maneira compatível com a imagem mental que eles têm do objeto (o visto). Segundo Parzysz (1988), geralmente, quando os alunos produzem ou fazem a leitura e interpretação de um desenho, pode surgir um conflito entre esses dois polos, do que se "vê" e do que se "sabe". Pires, Curi e Campos (2001) afirmam que, em relação a esses dois polos, um deles consiste em representar o objeto tal como o estudante imagina que ele apresentaria à sua vista, ou seja, polo do visto. No outro, procura representar, sem adaptação, as propriedades do objeto que o sujeito julga importantes, ou seja, o polo do sabido. Com isso, segundo as autoras, a situação do estudante em relação a esses dois polos evolui com a idade, com as diferentes atividades desenvolvidas, com as habilidades e capacidades gráficas, com o desenvolvimento do conhecimento geométrico, entre outros.

Em sua pesquisa, Parzysz (1991) aponta que, nas representações de objetos geométricos tridimensionais, o “sabido” predomina sobre o “visto”. Ele relata que três tipos de atitudes ocorrem sucessivamente de acordo com o nível escolar do estudante e que essas, às vezes, coexistem em alguns níveis de ensino. Segundo o pesquisador, não há conflito entre “visto” e “sabido” ou elas são ignoradas nos desenhos dos estudantes do início da escolarização. O autor destaca que nessa fase os estudantes desenham o que veem. Nas duas fases posteriores, os estudantes procuram representar, sem adaptações, as propriedades do objeto que consideram importantes em detrimento da representação do objeto da maneira como ele o imagina. Nesse caso, as representações de objetos geométricos espaciais passam a ter a influência do “sabido” sobre o “visto”.

Os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento nos ciclos

Como você deve ter percebido na leitura do Currículo da Cidade de Matemática é visível a ampliação do pensamento geométrico na descrição dos Objetivos de aprendizagem e desenvolvimento. No referido documento curricular, o trabalho com as figuras geométricas espaciais inicia-se no Ciclo de Alfabetização e amplia-se nos outros ciclos. Os Objetivos de aprendizagem e desenvolvimento envolvem muito mais do que o reconhecimento, a nomenclatura e as figuras. Nos Ciclos Interdisciplinar e Autoral, amplia-se o estudo de propriedades e características das figuras. Dessa forma, o documento apoia-se nos estudos teóricos citados neste texto e relaciona aquilo que o aluno pode “ver” no desenho relacionando aos conhecimentos que possui sobre o objeto que esse desenho representa.

No Ciclo de Alfabetização, ao iniciar com a exploração de formas presentes no cotidiano, o documento destaca, no primeiro ano, objetivos em que a criança possa explorar similaridades e diferenças entre formas presentes em seu cotidiano, a identificação de superfícies planas ou arredondadas na exploração de objetos e de desenhos de figuras geométricas espaciais, permitindo sua visualização e a nomenclatura delas, além de identificar similaridades e diferenças entre as faces planas em uma embalagem em forma de bloco retangular.

A figura a seguir refere-se ao desenho de uma criança de 7 anos (1° ano do Ciclo de Alfabetização) de uma caixa de leite.

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Figura 20 - Representação de uma caixa de leite

No segundo ano, os objetivos trazem os conhecimentos sobre as figuras geométricas espaciais destacando características e identificação de similaridades e diferenças entre elas, tanto oralmente como em representações, e ainda a identificação de objetos do cotidiano de conhecimento das crianças com figuras geométricas espaciais, como o bloco retangular, o cubo, a pirâmide, a esfera, o cone e o cilindro.

A figura a seguir refere-se ao desenho de uma criança de 8 anos (2º ano do Ciclo de Alfabetização) de objetos do cotidiano: uma lata de milho, que se parece com um cilindro.

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

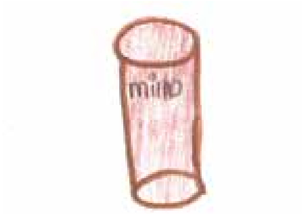


Figura 21 - Representação de uma lata de milho

No terceiro ano, a ampliação dos conhecimentos geométricos refere-se ao reconhecimento de elementos de figuras geométricas espaciais, como vértices, faces e arestas; às planificações e às comparações entre características de duplas de figuras geométricas espaciais, como cubo e paralelepípedo, por exemplo; à identificação de figuras planas nas faces de figuras geométricas espaciais, como a face quadrada de um cubo ou a planificação de um prisma.

A figura a seguir refere-se à planificação de um prisma e à identificação dessa planificação com a figura geométrica por uma criança de 9 anos (3º ano do Ciclo de Alfabetização).

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

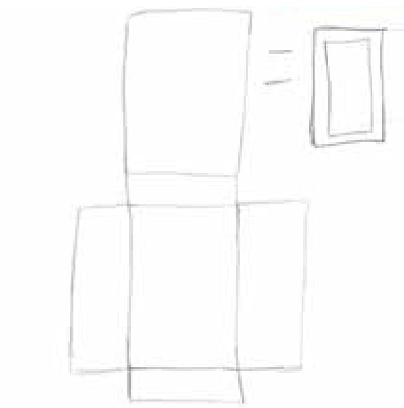
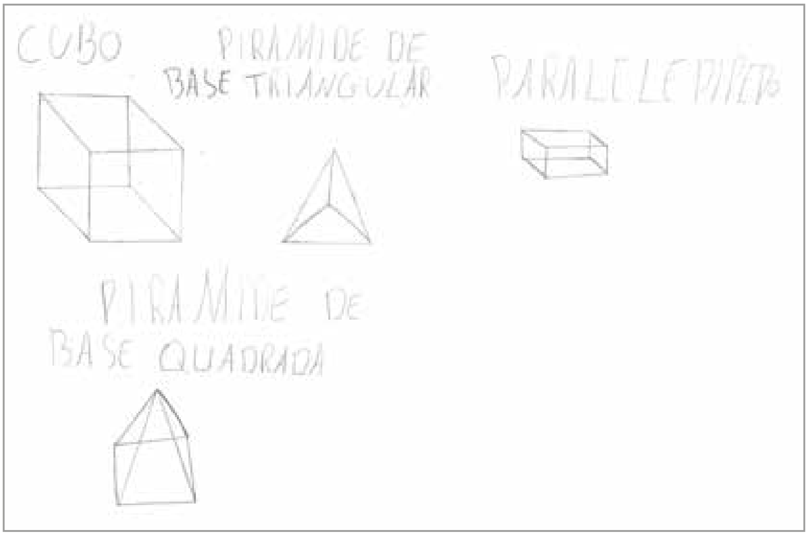


Figura 22 - Planificação de um prisma

No Ciclo Interdisciplinar, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento permitem o avanço no pensamento geométrico. No quarto ano desse ciclo, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento apontam para o estudo dos corpos redondos, elementos e planificações do cone e do cilindro e, ainda, comparações entre figuras geométricas espaciais, elementos e planificações.

Na sequência, apresentamos uma figura que se refere às representações de poliedros em que um estudante de 10 anos, do 4° ano, reconhece os poliedros, as bases das pirâmides, nomeia os poliedros e os representa mostrando o que já "sabe" das figuras geométricas.

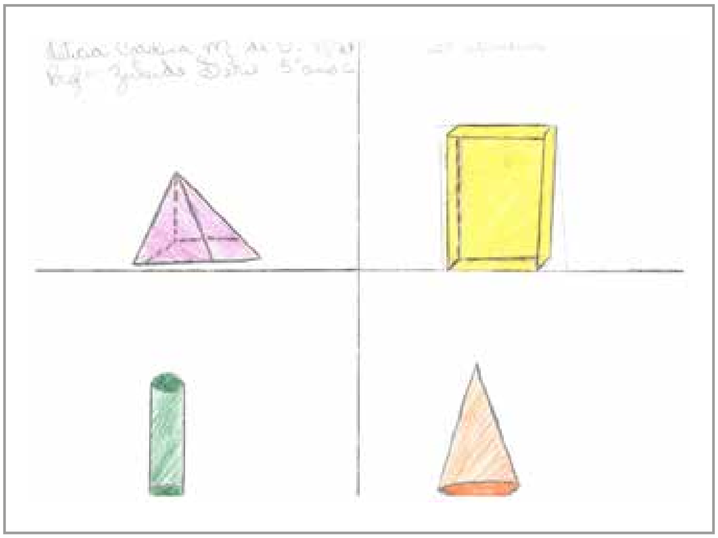


Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Figura 22 - Representação de poliedros

No quinto ano, o avanço dos conhecimentos geométricos refere-se, principalmente à investigações sobre relações entre vértices, faces e arestas dos poliedros, além de planificações e reconhecimento de características de figuras geometricas espaciais. O estudo dessas figuras dá-se, priorizando as características delas, o que remete ao nível de análise de Van Hiele. Nesse nível, os estudantes reconhecem as figuras geométricas por suas partes e características, a partir das atividades empíricas. A identificação dessas características acontece mediante a observação e a experimentação, mas ainda os estudantes não estabelecem relações entre as figuras e suas definições.

A figura a seguir, de uma estudante de 11 anos do 5° ano, refere-se à representação de poliedros e corpos redondos. A estudante mostra as faces ocultas das figuras, separa os poliedros dos corpos redondos, mostrando reconhecer as diferenças entre esses tipos de figuras geométricas. Ao que parece, a estudante faz a representação das figuras geométricas a partir de características que ela já domina e permite levantar a hipótese de que está no nível de análise do pensamento geométrico. Percebe-se, ainda, a demarcação forte do colorido das bases nos corpos redondos. Parece que a estudante quer mostrar que sabe que o cilindro tem duas bases e o cone apenas uma. Ela procura mostrar tudo que "sabe" no desenho dessas figuras geométricas, fazendo linhas tracejadas para apontar "o que não é visto" nos poliedros, mas que ela "sabe" que existe.

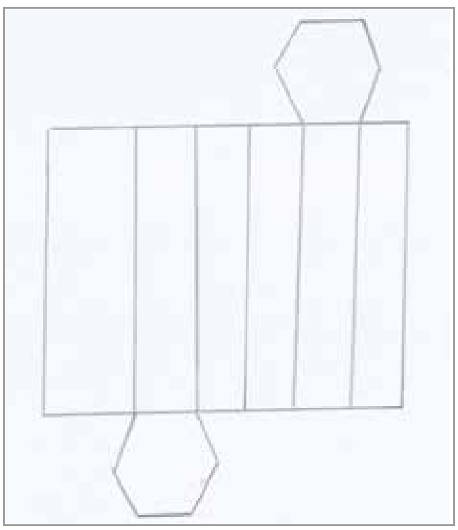


Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Figura 23 - Representação de poliedros e corpos redondos

No sexto ano, o avanço se dá no estudo das relações entre vértices, faces e arestas de um poliedro qualquer em função dos polígonos da base. O estudo dessas relações permite a identificação de prismas e pirâmides por meio de suas características.

A próxima figura refere-se a uma atividade realizada por um estudante de 12 anos, do 6º ano, em que o professor, após explorar relações entre vértices, faces e arestas de poliedros em função do polígono da base, deu a seguinte comanda: **o desafio de hoje é "desenhar" a planificação de uma figura geométrica espacial que possui duas bases iguais, 6 faces laterais em forma de retângulo e 18 arestas. Que figura pode ser "desenhada" ?**



Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Figura 24 - Planificação de prisma de base hexagonal

Os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento possibilitam também a análise de contra exemplos, como no desafio a seguir: **o desafio de hoje é “desenhar” a planificação de uma figura geométrica espacial que possui duas bases iguais, 10 faces laterais em forma de retângulo e 15 arestas. Que figura pode ser “desenhada” ?**

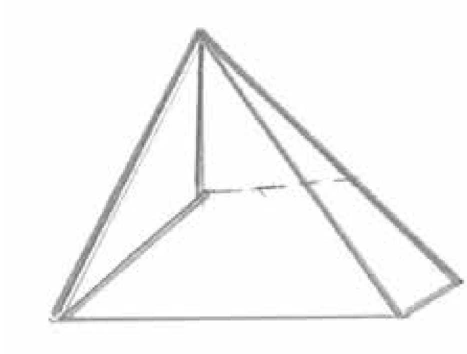
Os estudantes, a partir das análise das propriedades da figura, percebem que não existe figura com essas características, como é possível perceber nas respostas de dois estudantes que consertam os erros do enunciado do desafio.

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Figura 25 - Registro de propriedades de figuras

No Ciclo Autoral, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento ampliam-se ainda mais. No 7º ano com a ampliação das relações entre vértices, arestas e faces de poliedros em função dos polígonos da base, incluindo a relação de Euler. A análise dessas relações e dos elementos dos poliedros permite identificá-los a partir dessas relações em conjuntos de prismas ou de pirâmides, avançando nos níveis do pensamento geométrico para o nível de análise.

Na sequência, a figura apresentada refere-se a uma atividade resolvida por um estudante de 13 anos, do 7º ano, com a seguinte comanda: Quais são os poliedros que possuem o mesmo número de vértices e de faces e que têm o dobro de arestas do número de lados do polígono da base?



Fonte: arquivo pessoal das assessoras

Figura 26 - Representação de pirâmide de base retangular

Fonte: arquivo pessoal das assessoras

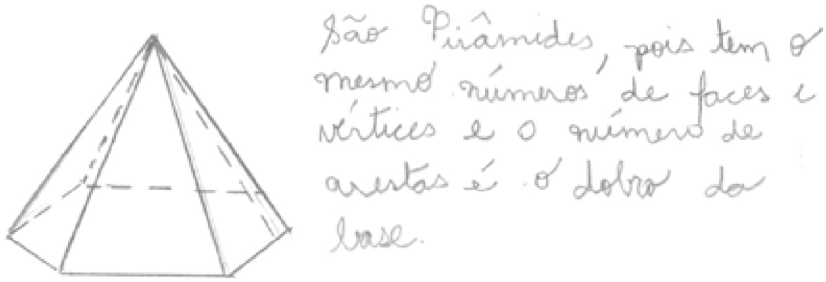


Figura 27 - Representação de pirâmide de base hexagonal

No 8º ano, a ampliação dá-se com objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que focalizam similaridades e diferenças entre poliedros regulares e poliedros de Platão. No 9º ano, a ampliação apresenta-se com objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que focalizam vistas e secções de figuras tridimensionais.

Como é possível perceber, ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental, os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, veiculados no documento curricular, permitem o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Geometria de transformações

Introdução

A movimentação é algo tão natural que não prestamos atenção à sua importância e aos conhecimentos geométricos inerentes a esse processo. Sem os movimentos, certamente, sentiríamos dificuldade para realizar inúmeras atividades que, embora pareçam simples, seriam inviáveis ou limitadas.

É certo que, ao movimentar-se a posição, em relação aos objetos que estão mais próximos, ela é alterada. Se colocarmos um copo de água sobre a pia e virarmos de costas para ele, a nossa posição em relação ao copo sofre uma transformação. Tal transformação ocorrida não afeta nossa forma física ou a maneira de pensarmos. Nesse sentido, os movimentos que damos aos objetos são, para nós, bastante naturais e normalmente não paramos para analisá-los. No entanto, mesmo que a forma ou o tamanho dos objetos movidos não se alterem, esses movimentos produzem uma modificação no ambiente em que ele está.

Se, por algum motivo, a forma ou, até mesmo, o tamanho do objeto sejam modificados, a intervenção da movimentação no ambiente é muito mais fácil de ser observada. Talvez seja esse motivo que ficamos tão impressionados ao observarmos uma batida forte entre dois carros por tratar-se de uma situação que envolve a mudança no formato desses objetos, ou seja, dos carros.

Essas situações práticas nos levam a pensar que os movimentos que fazemos no cotidiano podem ser observados com mais cuidado, uma vez que podem produzir descobertas significativas a partir de algumas observações, sistematizações e generalizações interessantes.

Quando um objeto sofre uma mudança na sua forma, no seu tamanho ou na sua posição em relação a outros objetos, dizemos que ele sofreu uma transformação, por exemplo, uma folha de papel rasgada ao meio, um vaso que transportamos do centro de uma mesa para pia, uma fotografia que foi ampliada ou reduzida de tamanho, todos esses objetos passaram por algum tipo de transformação, por uma mudança, quer seja de lugar, de posição ou mesmo tamanho.

Como vimos, o mundo das transformações é amplo, mas, ao refletirmos sobre o seu ensino na educação básica, estamos nos referindo às isometrias e às homotetias.

Mas o que são isometrias? Elas ocorrem de que maneira? Como podemos classificá-las?

As isometrias são transformações geométricas que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados, o que significa que nas isometrias não há distorção de tamanho, nem de formas, por isso elas são conhecidas como uma transformação rígida, uma vez que os objetos não sofrem mudanças, o que muda é a sua posição.

As isometrias são três: as translações, as rotações e as simetrias axial e central.

Translação

Iniciaremos nosso estudo pela translação. A translação é uma transformação geométrica em que a imagem da figura é obtida pelo deslocamento paralelo de todos os seus pontos a uma mesma distância, conservando a direção, sentido e, claro, suas medidas. Vejamos alguns exemplos:

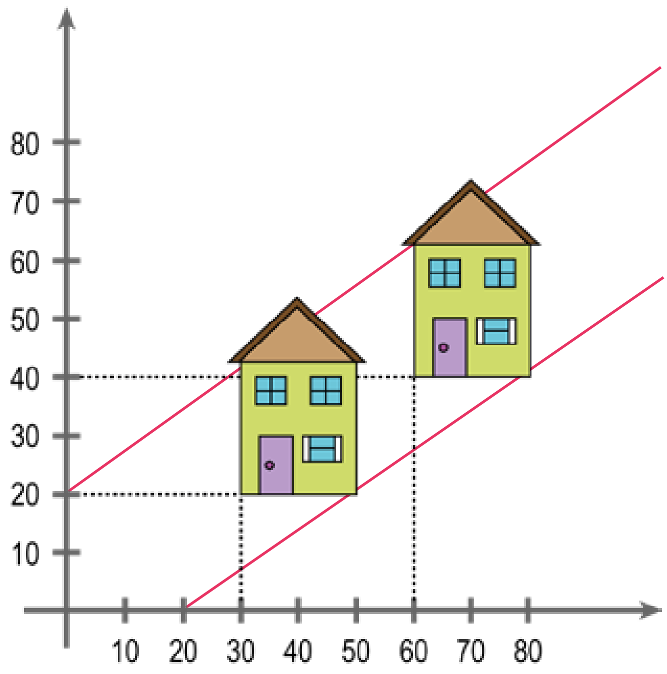


Figura 28 - Translação de um quadrado sobre retas paralelas

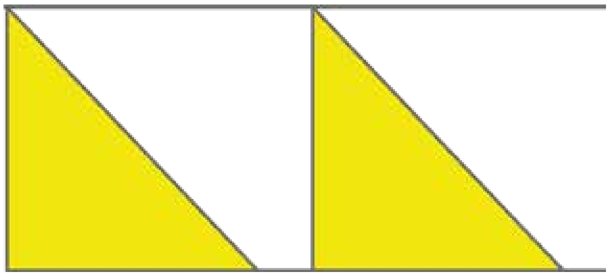


Figura 29 -Translação de um triângulo retângulo sobre duas retas paralelas.

Como podemos observar, existe uma repetição das imagens em cada uma das figuras (figura 28 e 29). As repetições podem ser realizadas uma ou mais vezes em intervalos regulares, como se estivesse deslizando a certa distância, em uma mesma direção.

Para aplicar o conceito, é necessário conservar as medidas dos segmentos e dos ângulos da figura original e traçá-las de forma idêntica, conservando a forma e o tamanho, a única diferença será a posição, podendo estar mais à esquerda ou à direita, para baixo ou para cima ou inclinada da original.

Rotação

A segunda isometria é a rotação obtida quando a figura gira em torno de um ponto que pode estar na própria figura ou fora dela. Vejamos alguns exemplos:

Figura 30 - Movimento de rotação da Terra.

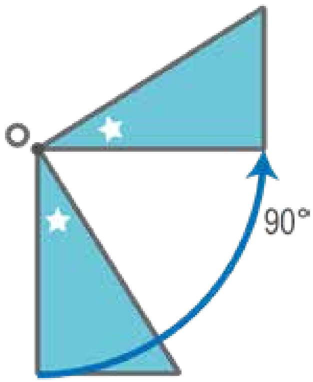


Figura 31 - Rotação de um triângulo retângulo

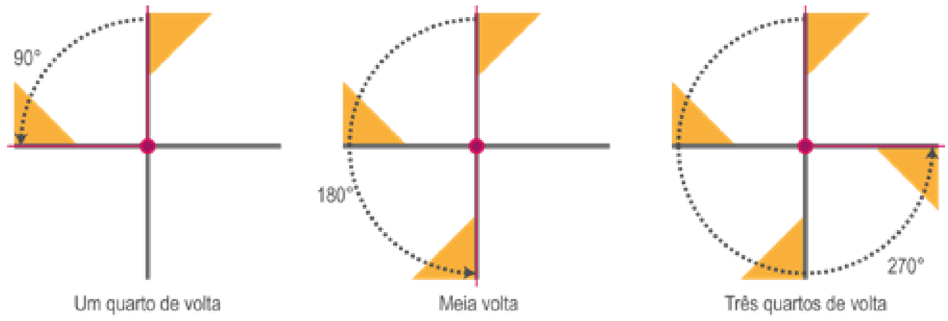


Figura 32 - Rotação de um triângulo em 90°, 180° e 270°

Como podemos observar nas rotações das figuras 30, 31 e 32, elas possuem um centro de rotação, são conhecidos a amplitude do ângulo e o sentido de rotação que pode ser horário, ou mesmo anti-horário.

Rotações que merecem destaque

Há algumas rotações que merecem destaque, a primeira diz respeito ao retângulo, quando ele gira em torno de um dos seus lados, ele gera uma figura similar a um "cilindro".

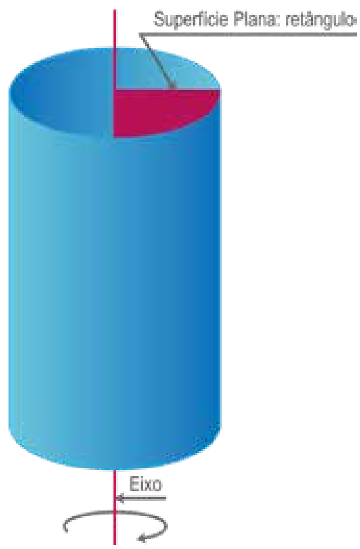


Figura 33 - Rotação de um retângulo sobre um de seus lados

Outra rotação importante é quando o triângulo retângulo gira em torno de um dos seus lados, que forma o ângulo reto (cateto), ele gera uma figura similar a um "cilindro".

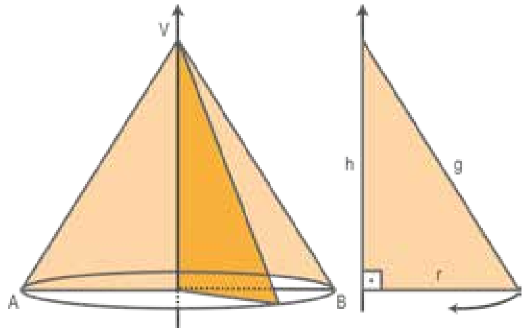


Figura 34 - Triângulo girando em torno de um dos seus catetos.

Reflexão ou simetria axial

O terceiro caso de isometria é a simetria axial ou também conhecida como reflexão. Simetrias axiais são aquelas construídas em função de um eixo, cujos pontos, objetos ou partes de objetos são a imagem espelhada e conservam a distância em relação ao eixo. Veja alguns exemplos:

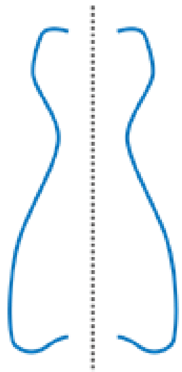


Figura 35 - Reflexão que lembra a silhueta de um corpo

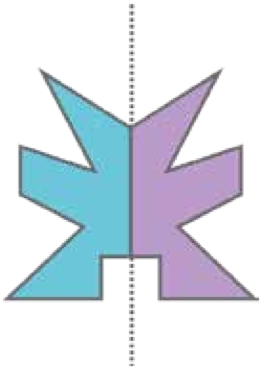


Figura 36 - Reflexão de uma figura irregular

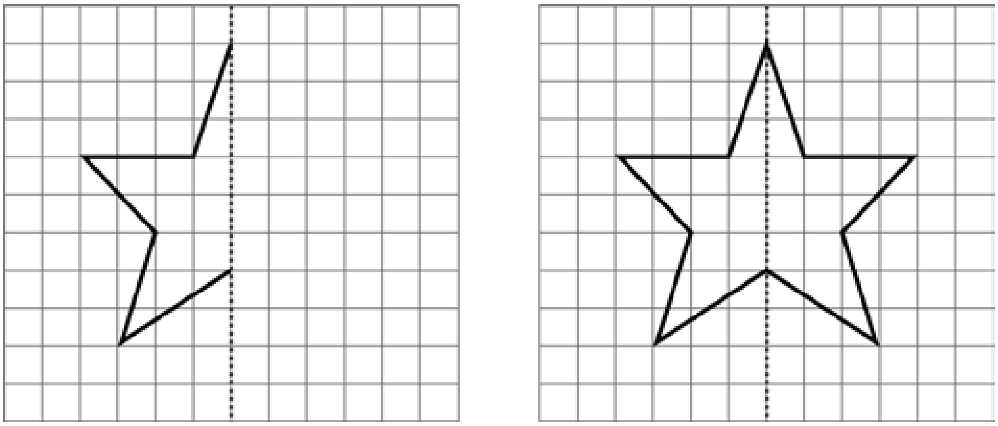


Figura 37 - Reflexão de uma estrela de 5 pontas

Como podemos observar, as isometrias de reflexão ou simetria axial lembram a imagem refletida por um espelho, ou seja, é o “espelhamento” da figura. Para fazer essa simetria axial, é preciso compreender que será o eixo de simetria que determinará a reflexão, conservando a forma, o ângulo e o tamanho, invertendo a imagem em relação à figura original, tendo como referência o eixo de simetria. Foi exatamente isso que aconteceu com as figuras 35, 36 e 37, suas imagens foram refletidas a partir do eixo de simetria.

Falamos de três tipos de isometrias, mas foi anunciado que havia mais um tipo de geometria de transformação, cujo nome é Homotetia.

Mas o que é Homotetia? Em que ela se diferencia da isometria?

Homotetia

A homotetia é um tipo de transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, mas mantém as características principais, como a forma e os ângulos. A homotetia ficou um pouco esquecida, quando o assunto se tratava de semelhança entre figuras geométricas. Mas se pensarmos na ampliação e redução de figuras geométricas, ela pode ajudar e muito nesse propósito. Quando utilizamos a homotetia, as características, como forma e os ângulos, são preservadas, ou seja, não são alteradas, porém o seu tamanho o será, proporcionalmente à razão de ampliação ou redução. As copiadoras que fazem ampliação ou redução de imagens utilizam o princípio da homotetia para produzir essas novas imagens.

Vejamos um exemplo de homotetia:

Se tomarmos o ponto A como centro da homotetia de razão 3, cujo comprimento do segmento AB' é o triplo do segmento AB. A medida dos seus lados aumentou três vezes, mas os seus ângulos internos não foram alterados.

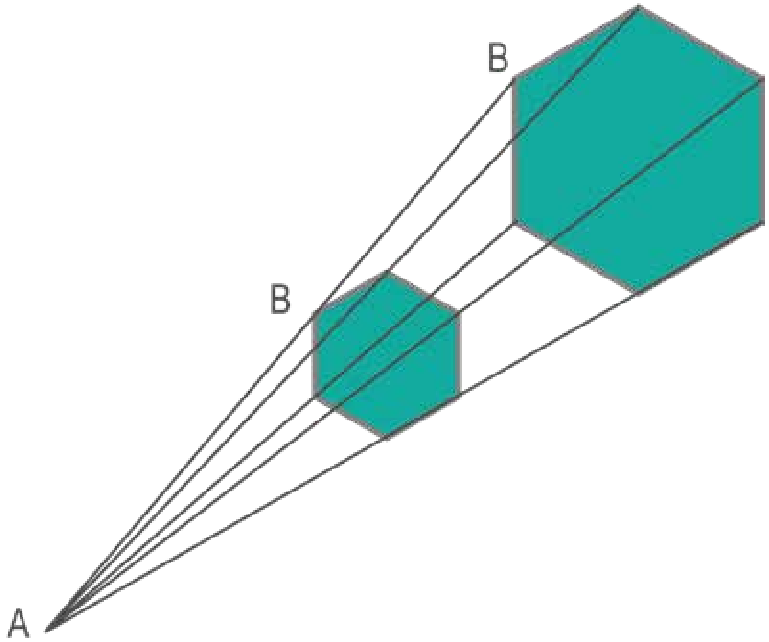


Figura 38 - Ampliação do hexágono, utilizando como recurso a homotetia.

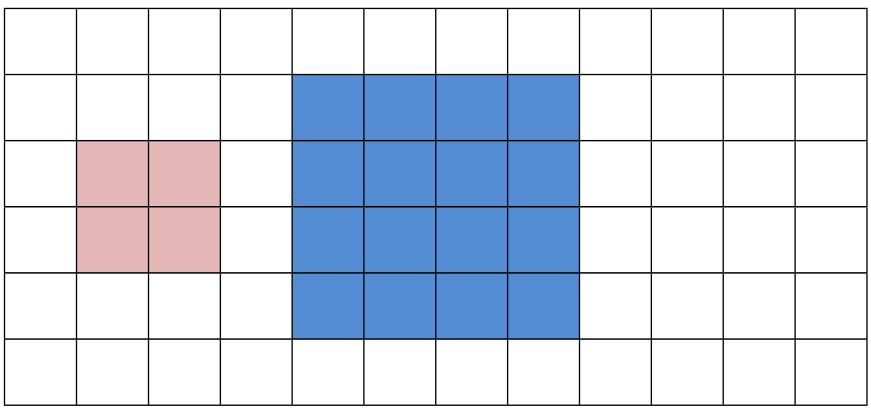
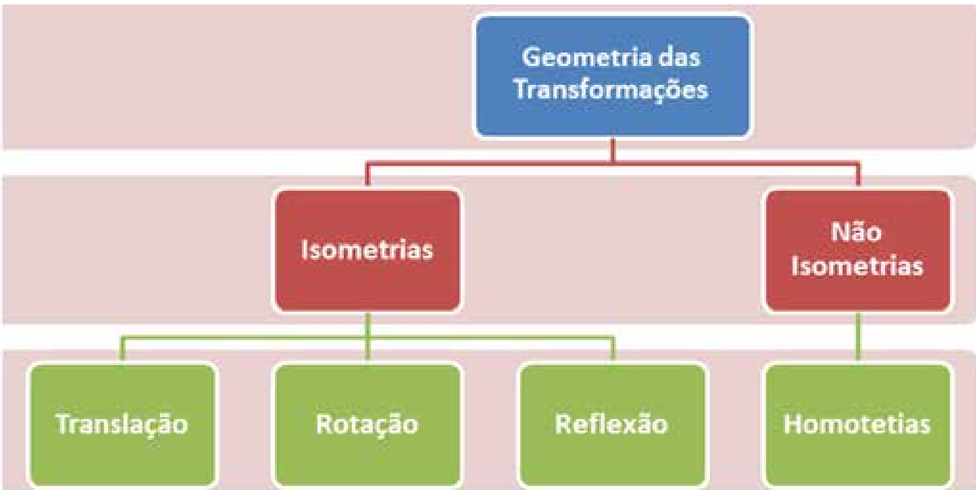


Figura 39 - Ampliação de um quadrado, utilizando malha quadriculada.

Como podemos perceber pelas figuras 38 e 39, encontramos figuras homotéticas, utilizando diferentes procedimentos, quer seja pela malha quadriculada, quer seja pela projeção de retas que partem de um ponto de fuga, ponto A (figura 38), que passam pelos vértices do hexágono, ampliando ou diminuindo a figura, quantas vezes for indicado, neste caso, 3 vezes.

A partir de todas as discussões organizadas sobre a geometria de transformação, apresentamos um quadro-síntese, indicando as relações hierárquicas entre as transformações, identificando as isometrias e as não isometrias.

Esquema de organização das transformações



Fonte: arquivo pessoal das assessoras

O ensino da geometria de transformações

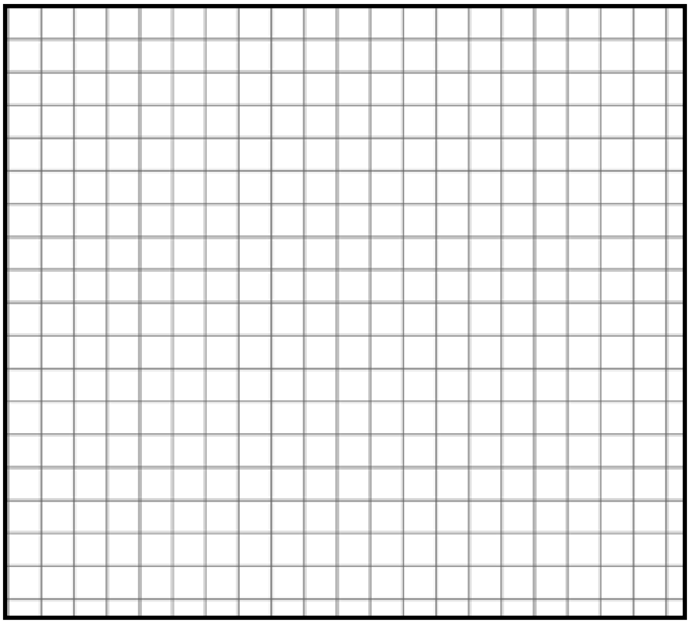
Na parte anterior, recuperamos os conceitos fundamentais da geometria das transformações, mas ela pode ser apresentada para os estudantes com atividades em que eles possam fazer observações e, a partir daí, sistematizar seus conhecimentos sobre a geometria das transformações, por meio das propriedades e da representação feita. Acreditamos que também possamos incluir o desenvolvimento de percepções sobre as propriedades das figuras, a partir da construção e das representações das atividades propostas aos estudantes.

Assim, podemos, ao mesmo tempo, desenvolver a representação, construção dos objetos/figuras, estabelecendo uma inter-relação das atividades propostas em que o estudante observa para construir, ou constrói para observar ou, ainda, representa e constrói (OCHI; PAULO; YOKOYA; IKEGAMI, 1997, p.11).

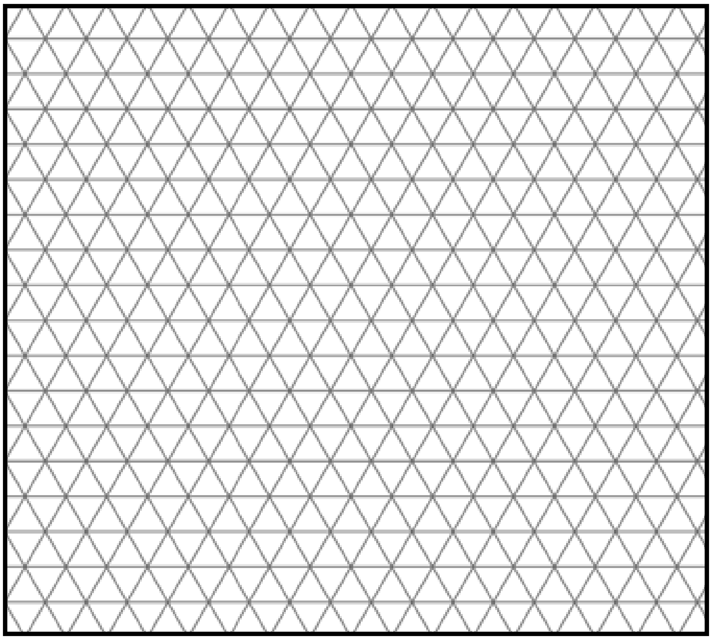
Para o desenvolvimento desses conceitos apresentados, faremos a indicação do uso de malhas quadriculadas. As malhas quadriculadas se referem às variações possíveis do papel quadriculado e a sua utilização pode ajudar os estudantes na observação dos desenhos/figuras que farão a partir das propriedades.

As malhas que o professor pode utilizar nesse trabalho são bastante variadas, entre elas destacaremos as quadriculadas, as pontilhadas e as triangulares, entre outras.

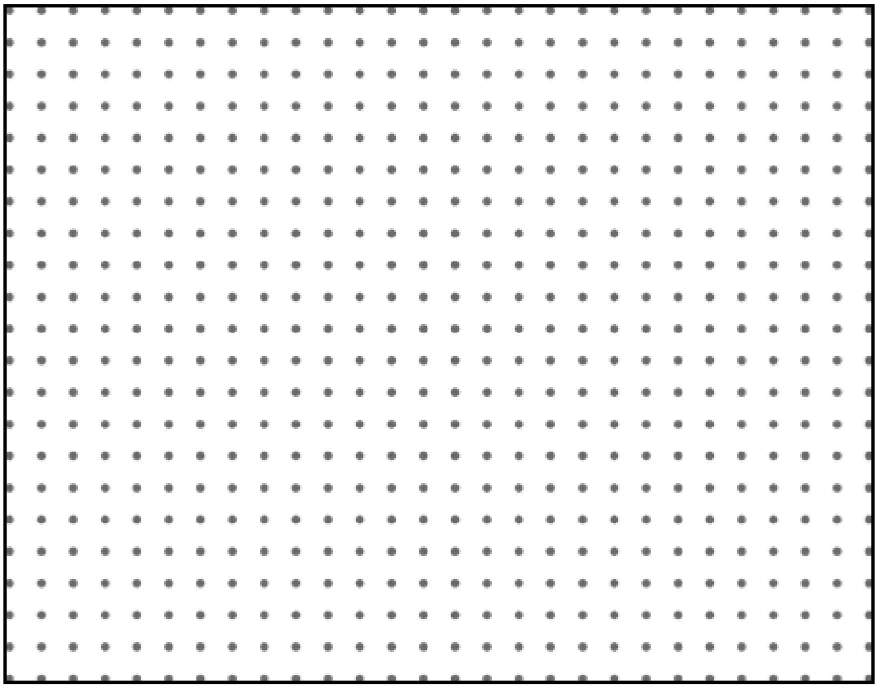
Malha quadriculada:



Malha Triangular



Malha pontilhada

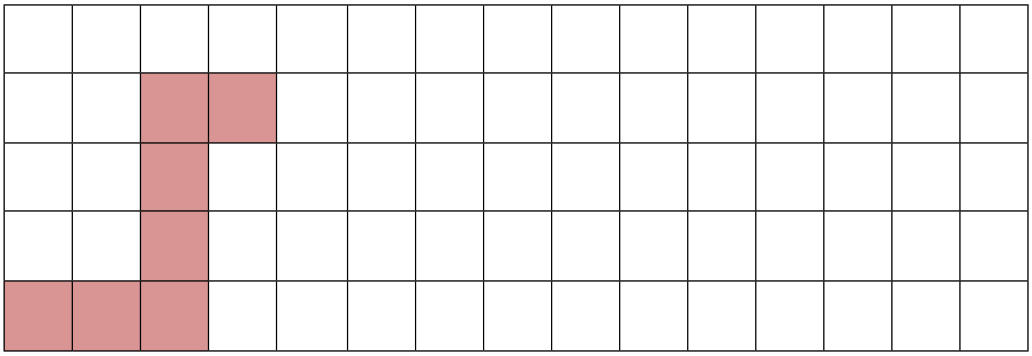


Com qual frequência você utiliza esses recursos em sala de aula?

Algumas possibilidades de atividades

A seguir, apresentamos algumas sugestões de atividades para ilustrar como a geometria das transformações pode ser trabalhada em sala de aula. A proposta é que essas atividades sejam ampliadas e adaptadas pelo professor, atendendo aos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento indicados no Currículo da Cidade.

1. Faça duas figuras como esta, deslizando sobre a malha quadriculada e preservando as mesmas características da figura pintada. Em seguida, complete o quadro que vem logo a seguir:



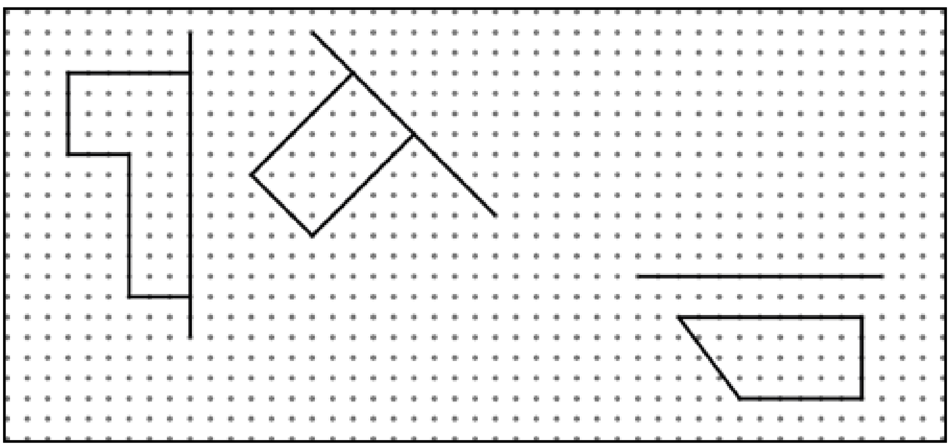
Escreva, no quadro abaixo, os procedimentos que utilizou para construir as figuras.

Esse tipo de atividade pode ser desenvolvida por estudantes a partir do 4º ano, em que eles têm a possibilidade de observar a posição que a figura ocupa na malha quadriculada, deslizar sobre uma reta, neste caso, a reta de baixo que dá a sustentação para a figura, podendo, em seguida, reproduzir dentro da malha quantas figuras quiser. Não há necessidade, nesta faixa etária, de nomear a geometria de transformação – translação –, mas é importante que ele perceba as características que ela possui, ou seja: manter as mesmas dimensões da figura original, forma, tamanho e ângulos, e perceber que a figura deslizou sobre um eixo.

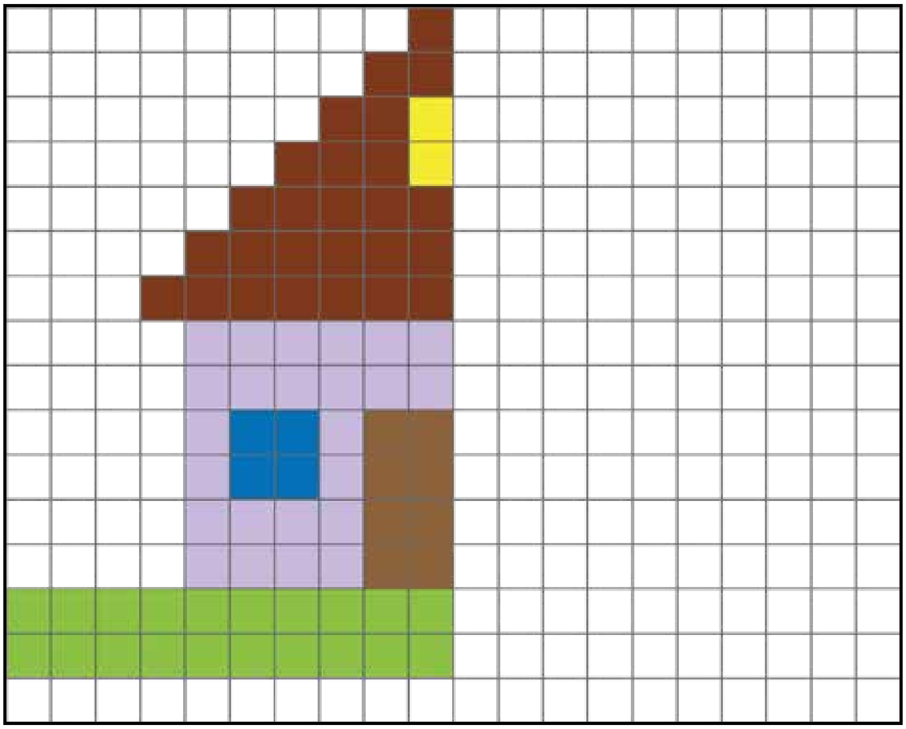
2. Faça, pelo menos, três figuras que tenha as mesmas características da figura apresentada, utilizando a malha pontilhada.

Essa atividade também pode ser realizada com estudantes a partir do 4º ano. O que foi modificado nessa atividade foi o suporte para sua realização, ao invés de malha quadriculada, foi sugerida a malha pontilhada. Mas da mesma forma que na sugestão anterior, é importante que na socialização das representações feitas, o professor possa chamar a atenção sobre as propriedades da translação, ou seja, a figura permanece com o mesmo tamanho, mesma forma, modificando apenas a sua posição. Vale também chamar a atenção para as possibilidades que os estudantes têm para construir as transformações, para cima, para baixo, na diagonal etc.

Trace figuras simétricas em relação ao eixo:



3. Complete o desenho de forma simétrica.



Na atividade 3 e 4, as propostas são para que os estudantes possam observar os eixos de simetria e realizar reflexões. Esse tipo de atividade está proposta no Currículo da Cidade – Matemática para os estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Muitos estudantes devem perceber que o eixo de simetria traz a ideia de espelhamento, "rebatimento" da figura, mas também conserva a forma, o tamanho e os ângulos das figuras desenhadas. Pode ser utilizado qualquer tipo de malha, desde que ela possibilite a conservação das características das figuras.

Os estudantes já podem nomear este tipo de transformação geométrica e produzir pequenas sínteses das observações feitas durante as construções. Neste caso, seria interessante que o professor pudesse registrar as conclusões da turma em relação à reflexão.

4. As atividades de rotação podem ser abordadas de modos diferentes:

Em um primeiro momento, o professor poderá utilizar papel de seda ou algum papel que tenha transparência, pedir para os estudantes copiarem as figuras e propor que façam as rotações, utilizando os termos como: um giro completo, meio giro, um quarto de giro a direita ou a esquerda, que correspondem respectivamente a rotações de 360°, 180° e 90°. Selecionamos aqui dois giros diferentes, um de 90° e outro de 180°.

Figura inicial

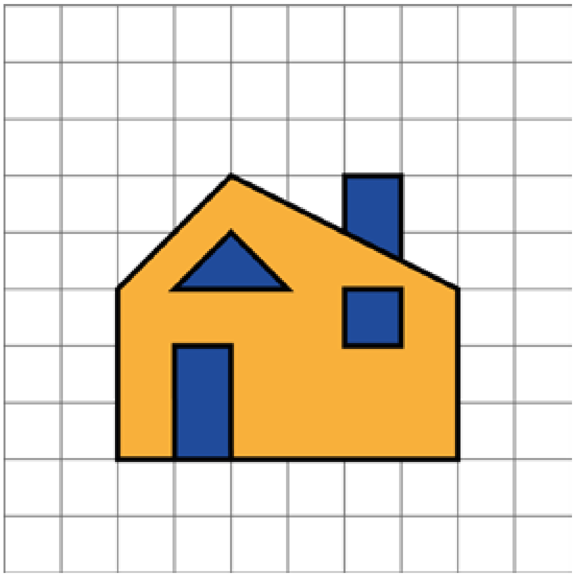
Giro de ¼ de volta - 90°

Giro de 180°

Esta atividade pode ser proposta para estudantes do 6° ano, mas fazendo uso do transferidor. Os estudantes têm a possibilidade de fazer outras rotações que exigem o uso desse instrumento como: 50°, 100°, 150°, entre outras. A partir daí, os próprios estudantes podem sugerir outras rotações, possibilitando que façam diferentes composições de uma mesma figura.

E para completar as propostas com as transformações geométricas, o professor pode ampliar esse trabalho com as homotetias.

As atividades de homotetia podem ser feitas utilizando-se malhas de um mesmo tipo, porém com tamanhos diferentes. Elas permitem que o estudante observe que o desenho conservou as mesmas características, forma, ângulos, mas de tamanhos diferentes, mantendo uma proporcionalidade entre suas dimensões.

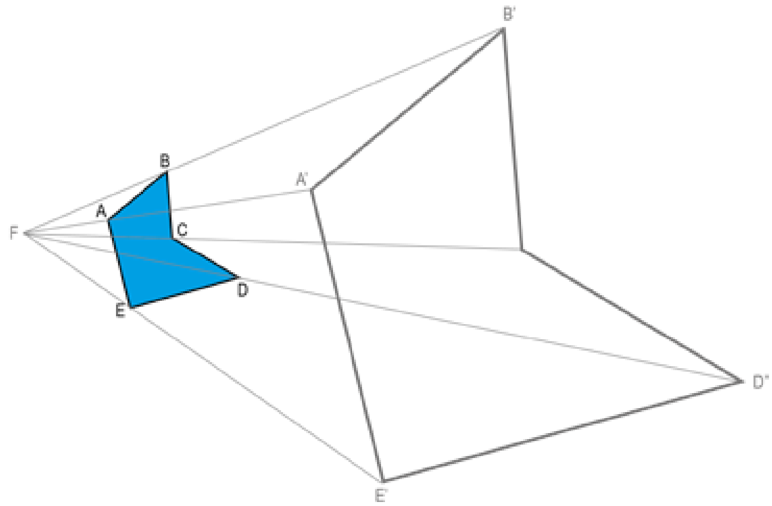


Além dessas atividades com malhas quadriculadas para o trabalho com homotetia, o professor também pode utilizar a ideia de projeção. Vejamos um exemplo:

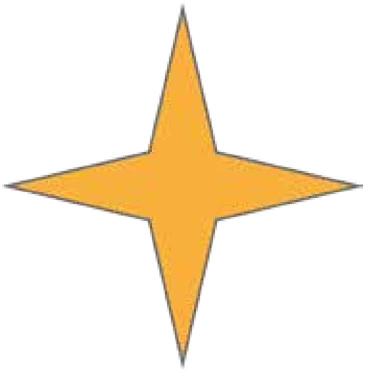
Ampliar a figura ABCD por meio da homotetia direta de forma que sua razão seja 3.

Marquemos um ponto F qualquer, F será o foco (ou ponto de fuga) da nova construção. Em seguida, construímos os segmentos de reta FA', passando por A; FB' passando por B; FC', passando por C; FD', passando por D; FE', passando por E. Tendo razão 3, ou seja, três vezes a medida correspondente a FA, FB, FC, FD e FE.

Como mostra a figura a seguir:

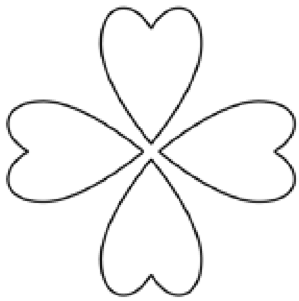


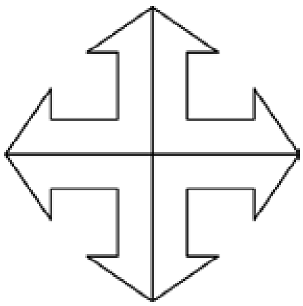
Agora, é a vez de o estudante reproduzir, por homotetia, a ampliação da figura a seguir, utilizando a razão 2.

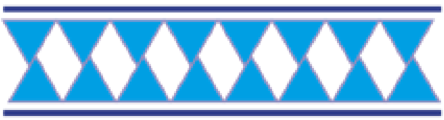


Para finalizar, é importante que, após cada atividade realizada, os estudantes tenham um momento para explicar como realizaram a atividade, que dificuldades tiveram na sua representação, o que observaram, o que foi possível perceber que ajude na formalização do conceito de translação, rotação, reflexão e homotetia.

Além disso, o professor pode propor atividades nas quais os estudantes utilizem diferentes transformações geométricas, fazendo belas composições, como é o caso das imagens a seguir:







Agora, verifique se os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do Currículo da Cidade são compatíveis com as atividades sugeridas para cada ano de escolaridade.

As figuras geométricas planas

Introdução

Durante muito tempo, começava-se a ensinar geometria na escola por meio das figuras geométricas planas, tendo o seu principal foco no reconhecimento do quadrado, do retângulo, do triângulo e do círculo. Acreditava-se que as crianças aprenderiam "mais e melhor" se primeiro fossem apresentadas às figuras planas. Hoje, a partir de inúmeras pesquisas desenvolvidas na Educação Matemática, sabemos que foram cometidos muitos equívocos ao associar, por exemplo, retângulos com caixas de sapato, quadrado com dados e, até mesmo, círculo a bolas de futebol, uma vez que há, nesse contexto explicitado, figuras geométricas planas e espaciais.

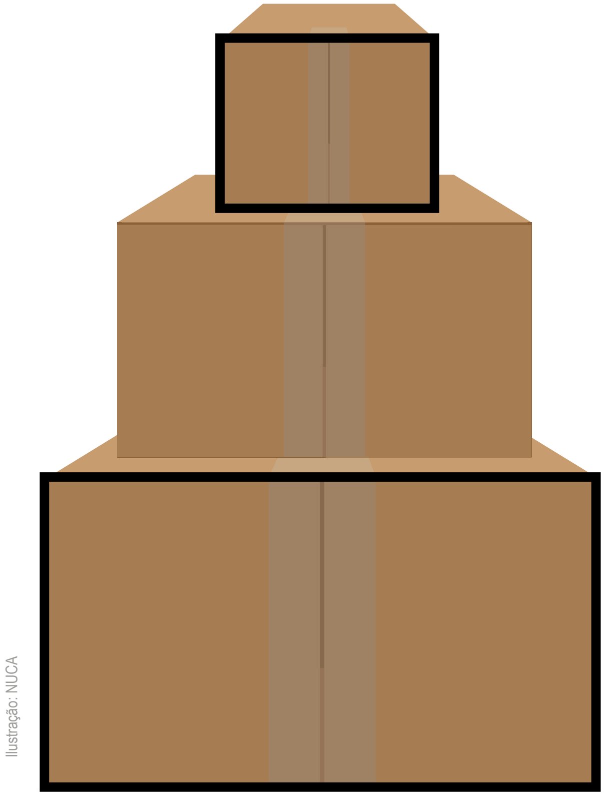
Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997) trouxeram uma demarcação para o ensino da geometria no Brasil, indicando que seria mais adequado se iniciar o trabalho de geometria pelas figuras geométricas espaciais, pois os objetos que as crianças têm contato em seu cotidiano são tridimensionais e guardam similaridade com as figuras geométricas espaciais, como esferas, cilindros, pirâmides, entre outros. A planificação das figuras geométricas espaciais traz a oportunidade de as crianças observarem que a sua decomposição pode gerar as figuras geométricas planas.

Neste texto, como anunciado no título, trataremos das figuras geométricas planas, uma vez que já temos outro texto neste material que trata da geometria espacial.

Muitos objetos, por terem espessura muito pequena, carregam consigo a ideia de serem bidimensionais, um exemplo disso pode ser a folha de papel, que é, na verdade, tridimensional (possui comprimento, largura e espessura), mas, por sua espessura ser tão pequena, muitas vezes, é confundida com uma figura geométrica plana.

Outra observação importante é que podemos identificar em objetos de três dimensões figuras planas. Vejamos alguns exemplos:

Imagem: Freepik.com



Além disso, também podemos reconhecer que muitas construções também são realizadas, tendo como referência as figuras planas, vejamos alguns exemplos:

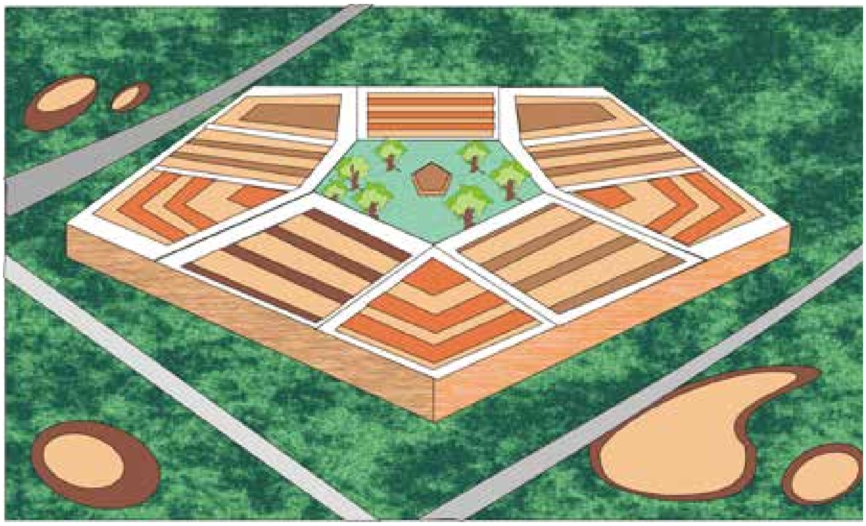


Figura 40 - Representação gráfica em forma de Pentágono, da Sede do Departamento de Defesa Americana

Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Air_Force_Academy_Chapel,_Colorado_Springs,_Colorado_LCCN2010630088.tif

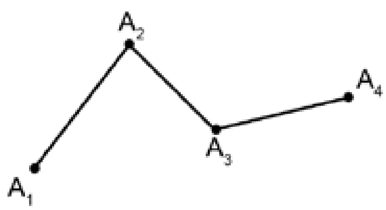
Figura 41 - Capela de Cadetes Americanos – USA.

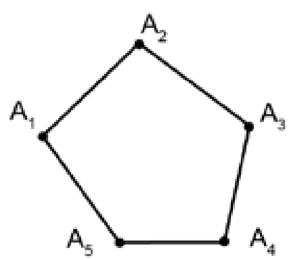
Notamos que as figuras geométricas planas estão presentes em nosso cotidiano e possuem uma grande variedade de formas. Vimos, nas figuras 40 e 41 que elas também estão presentes na arquitetura, como no Pentágono, que leva esse mesmo nome em função da similaridade com a figura geométrica plana, ou mesmo a Capela de Cadetes da Força Área Americana, que lembra a forma de inúmeros triângulos em sua formação. Essas diferentes formas, como quadrados, retângulos, circunferências, triângulos, entre outros possuem duas dimensões: comprimento e largura e são o chamadas de polígonos.

Mas o que são polígonos? Quais figuras geométricas planas são polígonos? E quais não são polígonos? Como posso saber?

Polígonos

Linha poligonal é formada por um conjunto de pontos ordenados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e pelos segmentos $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3} \ldots, \overline{A_{n-1}}$. Os pontos são os vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados (ou arestas).





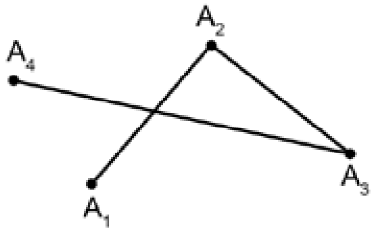


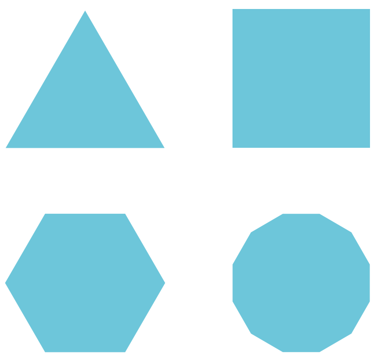
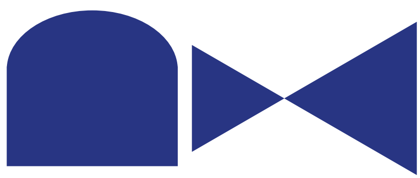
Figura 42 - Exemplos de linhas poligonais

Fonte: PINHO, J.L.R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N.T.B, p.169.

Polígono de n lados é uma linha poligonal com vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ satisfazendo as seguintes condições:

- Todos os vértices são distintos;
- Os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;
- Os dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Vejamos alguns exemplos:

Polígonos	Não polígonos
	
As figuras deste agrupamento são consideradas polígonos porque: - são formadas por segmentos de reta, consecutivos e não lineares; -são todas fechadas.	A primeira figura geométrica plana deste agrupamento não pode ser considerada um polígono, uma vez que ela não é formada apenas por segmentos de retas. A segunda figura também não pode ser considerada um polígono porque seus segmentos de reta se cruzam.

Além dos lados e dos vértices, os polígonos também possuem ângulos internos e externos. O ângulo interno é formado por dois lados consecutivos desse polígono. Os ângulos externos são formados pelo prolongamento de um de seus lados com o segmento de reta do lado adjacente a eles, como mostra a figura a seguir.

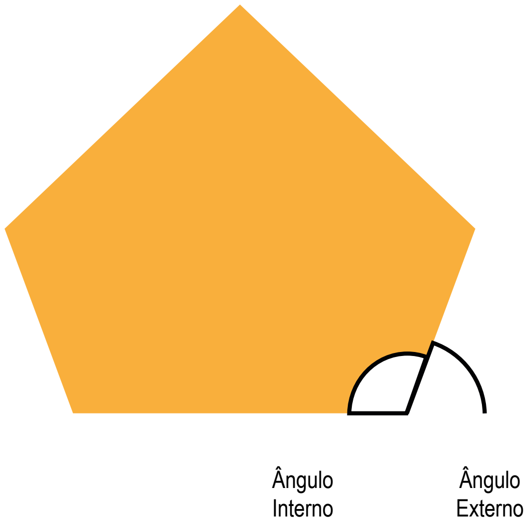


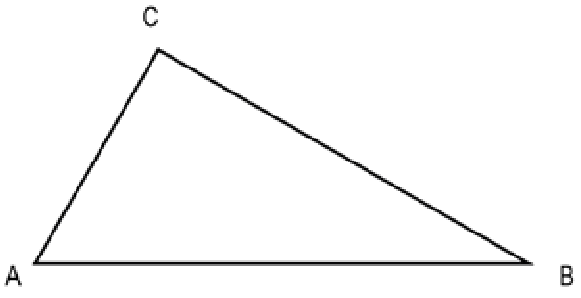
Figura 43 - Ângulo interno e externo de um polígono

Os polígonos recebem nomes diferentes de acordo com o seu número de lado, vejamos como eles podem ser chamados:

Nome do polígono	Nº de lados
Triângulo	3
Quadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Decágono	10

Os Triângulos

Os triângulos podem ser definidos como polígonos que têm três pontos não colineares e os três segmentos de reta que têm cada um, dois destes pontos como extremidades, como mostra a figura a seguir:

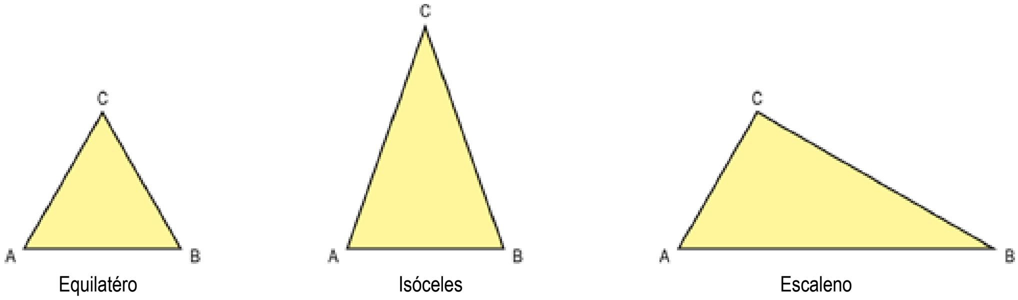


Classificação de Triângulos

Os triângulos podem ser classificados segundo as medidas de seus lados ou as medidas de seus ângulos:

Quanto aos lados, os triângulos são denominados:

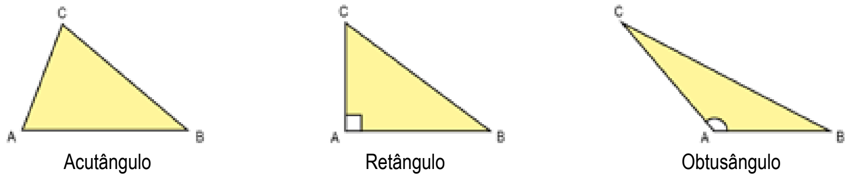
- Equiláteros – os três lados são congruentes[2];
- Isósceles – (pelo menos) dois lados congruentes;
- Escalenos – três lados distintos ou com medidas diferentes.



2 Congruente: mesma medida.

Quanto aos ângulos, os triângulos são denominados:

- Acutângulo – possui todos os ângulos agudos (< 90°)
- Retângulo – possui um ângulo reto (= 90°)
- Obtusângulo – possui um ângulo obtuso (> 90°)

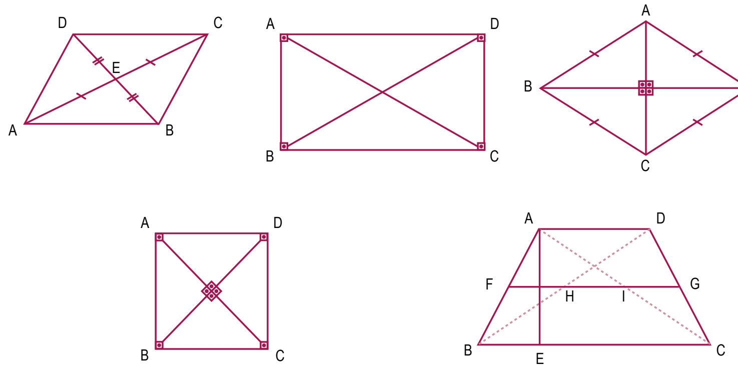


Quadriláteros

Quadriláteros são polígonos formados por quatro segmentos de retas consecutivos e não colineares. Esta definição traz como consequência as seguintes características:

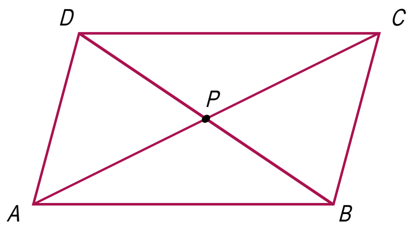
Por serem polígonos: 4 ângulos, 4 vértices, 2 diagonais e a soma dos seus ângulos internos é de 360°.

Vamos tratar aqui de alguns quadriláteros com características especiais (paralelismo entre lados, congruência de lados, congruência de ângulos). Essas características determinarão classes (ou subconjuntos) de quadriláteros, algumas contendo outras. No entanto, as definições de cada um deles serão feitas de forma independente e, a partir da análise das propriedades de cada um, determinaremos se uma classe de quadriláteros está ou não contida em outra. A figura a seguir indica alguns quadriláteros:



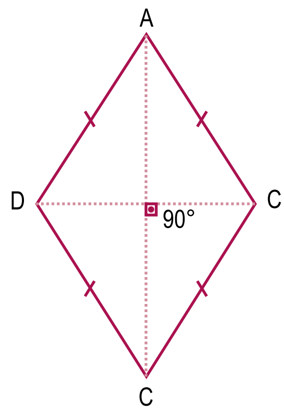
Paralelogramo

Paralelogramo é um polígono que possui lados opostos paralelos e congruentes. Suas diagonais se interceptam em seus pontos médios. Além disso, possui ângulos opostos congruentes, conforme mostra a figura a seguir:



Losango

O losango é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes. Seus ângulos opostos são congruentes e suas diagonais são perpendiculares, conforme figura abaixo:

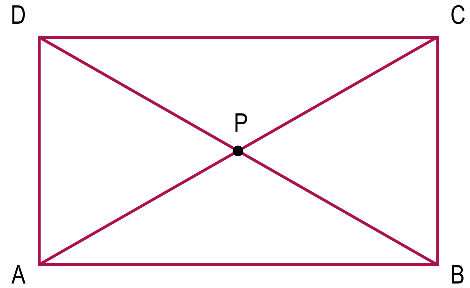


Será que podemos afirmar que todo losango é um paralelogramo? Pense nas definições de paralelogramo e nas definições de losango, veja o que há de comum e o que há de diferente, depois continue a leitura.

Observação: **Podemos, a partir da definição de paralelogramos, afirmar que** todo losango é um paralelogramo, uma vez que as características do paralelogramo estão presentes no losango, pois possuem lados opostos paralelos e congruentes, ângulos opostos também congruentes e suas diagonais se interceptam no ponto médio. Mas nem todo o losango é um paralelogramo.

Retângulo

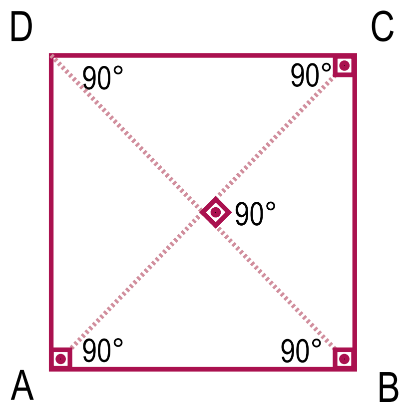
Retângulo é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos e congruentes, seus ângulos internos são congruentes medindo 90° e diagonais congruentes.



Será que podemos afirmar que todo retângulo é um paralelogramo? Pense nas definições de paralelogramo e nas definições de losango, veja o que há de comum e o que há de diferente, depois continue a leitura?

Quadrado

Um quadrado é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos (90°). Da definição, depreende-se que um quadrado é um losango e também é um retângulo e, portanto, é um paralelogramo. Ele herda, portanto, todas as propriedades daqueles quadriláteros: suas diagonais são congruentes, perpendiculares e se interceptam ao meio.

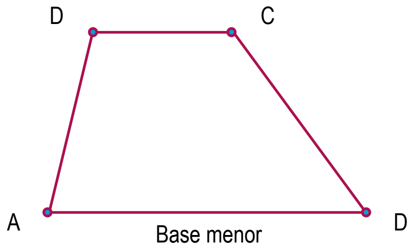


Trapézios

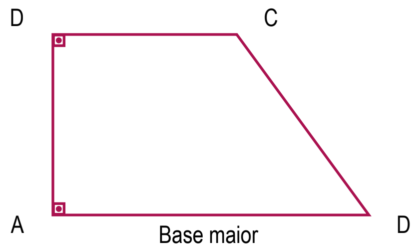
Trapézio é um quadrilátero que possui um único par de lados paralelos. Os lados paralelos do trapézio são chamados de base; o que tem maior medida é, comumente, chamado base maior, e o que tem menor medida é a base menor. As propriedades dos paralelogramos **não** são válidas para os trapézios.

Os trapézios podem ser escalenos, retângulos e isósceles.

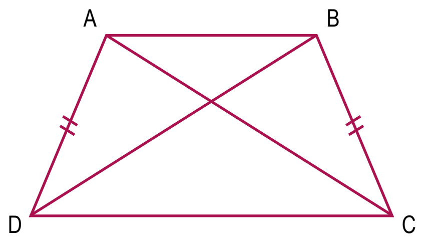
Trapézio Escaleno: são aqueles que possuem um par de lados paralelos, mas seus lados não possuem nenhuma medida igual.



Trapézios Retângulos: são aqueles trapézios que possuem dois ângulos internos com medida de 90°.



Trapézios isósceles: são aqueles em que os lados que não são paralelos possuem a mesma medida (são congruentes).

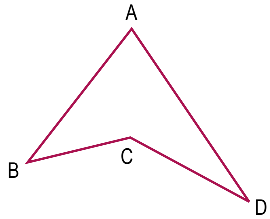


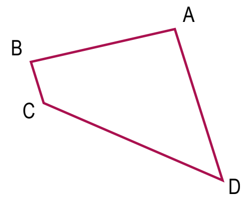
As propriedades específicas para o trapézio isósceles são as seguintes:

1. Os ângulos da base maior do trapézio isósceles são iguais;
2. As diagonais do trapézio isósceles são congruentes.

Outros Quadriláteros

Outros quadriláteros: são todas as figuras geométricas planas que possuem 4 vértices e 4 ângulos, mas não possuem nem um par de lados paralelos, como é o caso dos trapézios, nem, tampouco, dois pares de lados paralelos, como é o caso dos paralelogramos. Vejamos alguns exemplos:

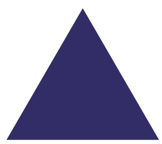
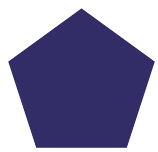
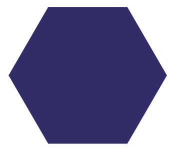




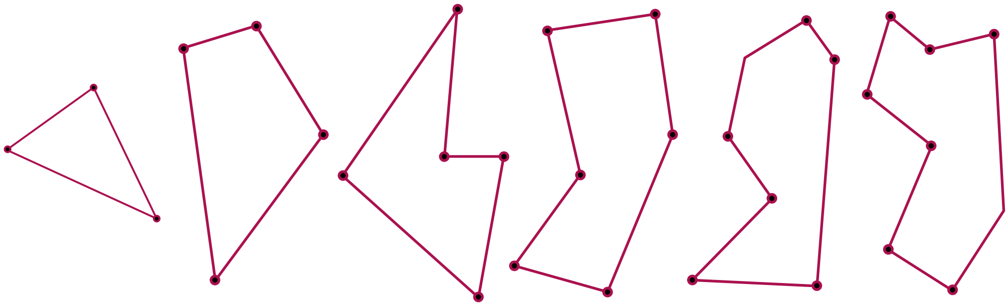
Outros Polígonos

Além dos polígonos estudados anteriormente, temos ainda outros que podem ser regulares ou irregulares.

Os **polígonos regulares** são aqueles em que todos os seus lados são congruentes e como consequência seus ângulos internos também são congruentes. Exemplos de polígonos regulares: Triângulos Equiláteros, Quadrado, Hexágono Regular, entre outros.

Polígono regular	Imagem
Triângulo equilátero	
Quadrado	
Pentágono	
Hexágono	

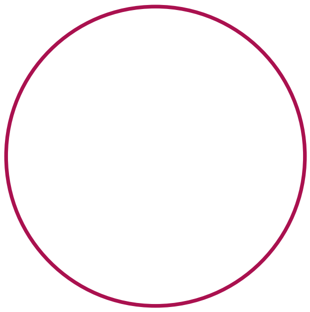
Os polígonos irregulares são aqueles em que todos os seus lados não são congruentes, logo, os seus ângulos internos também não são congruentes. Vejamos alguns exemplos:



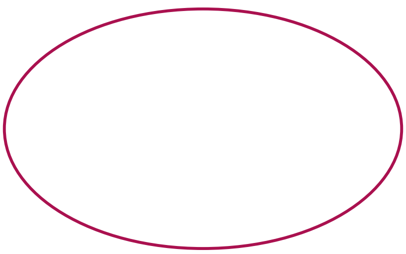
3 lados 4 lados 5 lados 6 lados 7 lados 8 lados

Outras figuras geométricas planas

Além dos polígonos temos ainda outras figuras planas como círculos, ovais entre outras.



Círculo



Oval

Algumas possibilidades para o trabalho com a geometria plana

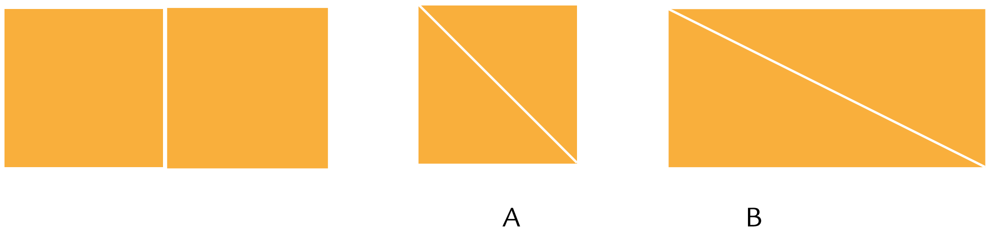
Ciclo de Alfabetização

A aprendizagem da geometria plana no Ciclo de Alfabetização deve ser iniciada de forma gradual, partindo dos conhecimentos que as crianças possuem do mundo real, podendo, nesse percurso, formar os conceitos essenciais. A manipulação de objetos conhecidos e a reflexão sobre as atividades propostas terão papel fundamental para essa construção. O trabalho deverá estar focado nas experiências informais, que vão sendo propostas ao longo das atividades desenvolvidas, e serão a base para o ensino mais formal, de maneira que os estudantes possam fazer explorações, observações, desenhar e estabelecer comparação entre as representações feitas.

Nesta faixa etária, seria interessante que as atividades fossem exploradas oralmente, identificando as similaridades e as diferenças entre algumas figuras geométricas planas, como os triângulos, os quadrados, os retângulos e os círculos, permitindo sua representação, o reconhecimento de algumas características, como vértices e lados e ainda identificar as que são polígonos e as que não são. Além disso, é importante que os estudantes consigam identificar algumas figuras geométricas planas e saiba nomeá-las. Para isso, o professor pode utilizar algumas brincadeiras de adivinhação que as identifiquem por meio de algumas de suas características.

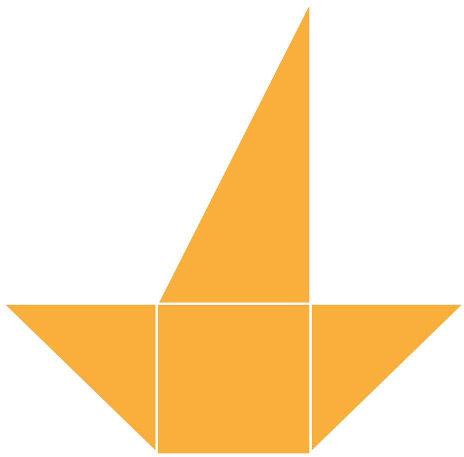
Outra tarefa investigativa interessante para este ciclo é a construção de figuras a partir das que ficam disponibilizadas, como retângulos, quadrados e triângulos, que podem ser confeccionadas com cartão, cartolina, madeira etc. A ideia é que os estudantes tenham contato com essas figuras e, a partir delas, construam outras.

Construção das figuras: o retângulo B deve corresponder ao tamanho de dois quadrados. Os dois triângulos resultam da dobradura ao meio da figura A e da B por uma de suas diagonais, como mostrado a seguir:



Tarefa Investigativa: os estudantes podem, de forma livre, traçar figuras, utilizando quantas peças quiserem. Isso permite que se familiarizem com a forma e com o nome; o professor pode passar por entre as carteiras e solicitar que o estudante fale sobre a representação feita, ao mesmo tempo que diz o nome das peças que utilizou para fazer o seu desenho.

Depois o professor pode apresentar um novo desenho como o de um barquinho e solicitar que os estudantes o representem.



Durante a realização da atividade, o professor pode fazer perguntas como:

"Que peças devemos utilizar para podermos construir uma figura igual?", "De quantas vamos precisar?". Que movimentos vocês fizeram para que a figura de vocês ficasse igual a esta? Com estas questões pretende-se não só que as crianças reconheçam triângulos em diferentes posições, mas também que possam identificar a forma e o número de peças que terão de utilizar na construção.

Essas são algumas propostas que o professor pode utilizar no Ciclo de Alfabetização. A partir delas, os estudantes poderão inventar novas figuras e propor que os colegas as reproduzam, mas que também possam representar os desenhos de seus colegas, além de descrever os processos que utilizaram.

Ciclo Interdisciplinar

A aprendizagem da geometria plana no Ciclo Interdisciplinar envolve a ampliação dos conhecimentos do ciclo anterior. O foco deve estar na representação e no registro das observações que permitam aos estudantes ir, progressivamente, estabelecendo relações entre as figuras geométricas planas estudadas, sistematizando os conhecimentos sobre suas propriedades.

As atividades exploratórias também podem ser de grande apoio ao professor neste ciclo, pois permitem ao estudante um espaço de descoberta e também registros mais consistentes sobre suas observações, apoiadas nas propriedades dessas figuras.

Os estudantes terão a oportunidade de classificar e comparar polígonos: triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, paralelogramos a partir do conhecimento das medidas de seus lados e vértices.

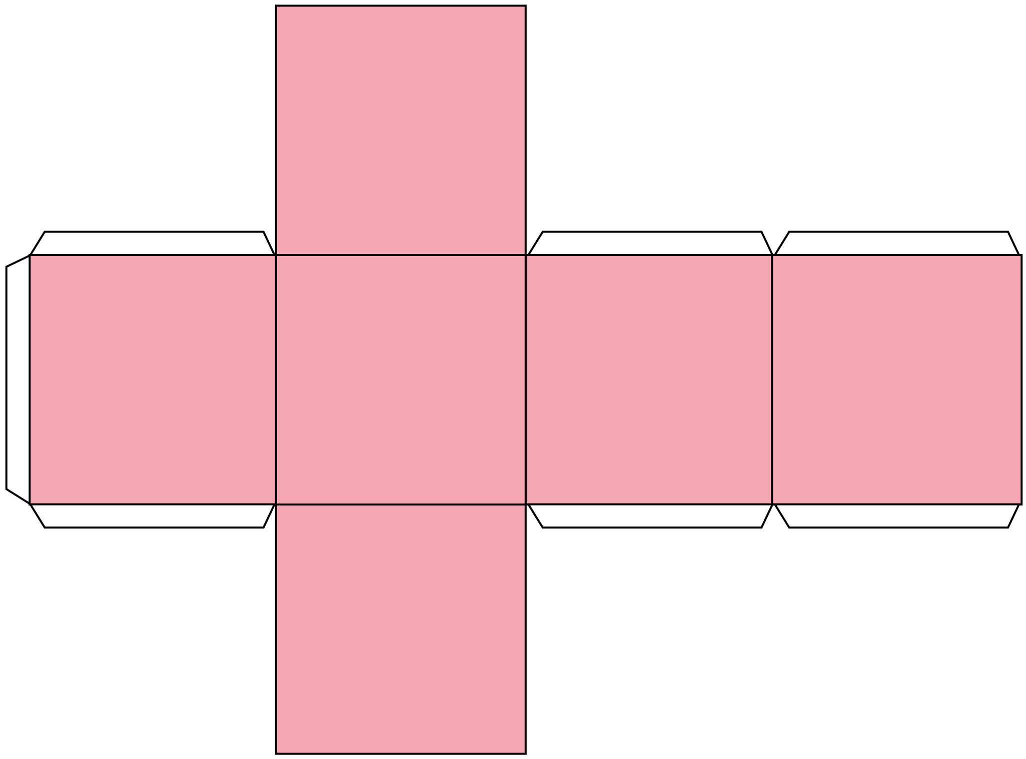
O jogo da Adivinhação pode contribuir para que os estudantes possam observar as características das figuras geométricas planas e iniciar o processo de sistematização das propriedades dessas figuras.

A turma pode ser organizada em grupos de três a quatro estudantes, as peças como quadrados, retângulos, círculos, ovais, trapézios, paralelogramos, losangos, pentágono, hexágono entre outras serão distribuídas no centro da mesa e uma criança escolherá uma peça, sem movê-la da mesa, sem mostrar aos demais qual foi a figura escolhida, como indicado a seguir:

Um dos estudantes levanta uma característica: tem quatro lados? Se o colega que escolheu a figura disser sim, as crianças já sabem que a figura escolhida é um quadrilátero. Agora, um novo colega faz uma nova pergunta, por exemplo: a figura escolhida tem quatro lados iguais? Se a resposta for sim, a figura pode ser um quadrado ou um losango. O próximo colega pode perguntar, a figura se parece com um “balãozinho”? Se o colega responder que sim, ele descobriu que a figura é um losango. Esse jogo pode se feito durante todo o ano, ampliando o número de figuras geométricas que serão disponibilizadas para o jogo.

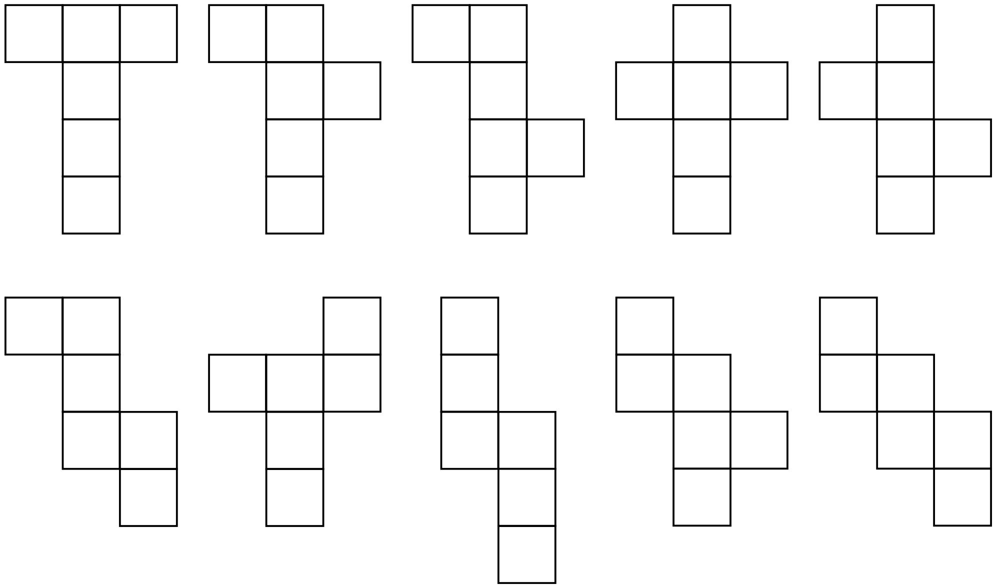
Outro objetivo proposto para esse ciclo está ligado à associação das planificações de algumas figuras geométricas espaciais com as figuras planas que as compõem. As atividades de montar e desmontar figuras ajudam a estabelecer esta correspondência. Vejamos algumas possiblidades:

1. Planificação do cubo:



Os estudantes recebem a planificação do cubo, eles irão recortar cada quadrado que o compõe e, em seguida, devem verificar em que posição poderão colocar cada lado do quadrado, de maneira a permitir novamente o seu fechamento.

Nesse trabalho de investigação, os estudantes perceberão que há inúmeras maneiras de fechamento para essa figura geométrica espacial, no total 11 possibilidades, o que traz uma ampliação bastante significativa do pensamento geométrico e espacial da turma. Vejamos quais são essas possibilidades:



Essas são algumas possibilidades do trabalho com a geometria plana no Ciclo Interdisciplinar. Essas atividades permitem que os estudantes observem, construam, registrem suas descobertas e sistematizem os conhecimentos, ampliando-os em relação ao ciclo anterior.

Ciclo Autoral

No Ciclo Autoral, os estudantes continuam ampliando os seus conhecimentos geométricos relacionados à geometria plana, conhecerão a condição de existência de um triângulo, podendo também utilizar para esta finalidade as tarefas investigativas, vejamos uma possibilidade:

Para a realização desta atividade, os estudantes precisarão de régua, transferidor. A ideia é que eles possam fazer construções e discutam se é possível ou não construir triângulos que tenha essas características.

Será que podemos construir triângulos, conhecendo alguns de seus elementos?

Orientação para a construção do triângulo	Registro se foi possível ou não a construção. *(Dê um exemplo e um contraexemplo, caso não seja possível a construção)*
A medida de dois de seus lados e o ângulo que é formado por esses lados?	
A medida de dos dois de seus lados e o valor do ângulo oposto ao maior desses lados?	
A medida dos três lados?	
A medida de um lado e o valor dos dois ângulos que estão apoiados nesse lado?	

Fonte: Adaptado de PONCE, 2004, p. 71.

Essas situações podem propiciar uma boa discussão sobre quais as condições necessárias para a construção de triângulos, permitindo que os estudantes coloquem em jogo as propriedades dos triângulos, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. Ou mesmo que, para construir um triângulo, conhecendo os seus lados, é necessário que a soma de dois de seus lados seja maior ou superior à medida do outro lado.

Outra atividade interessante que pode ser proposta aos estudantes desse ciclo é a que trata das relações entre as diagonais dos quadriláteros.

Essa é uma atividade que possibilita o trabalho de construção dos quadriláteros e a análise de como se comportam as suas diagonais.

Os estudantes devem construir quadrados, retângulos, trapézios, paralelogramos e losangos e suas respectivas diagonais.

Depois de construir, irão analisar as diagonais de cada uma delas, verificando se: possuem a mesma medida ou medidas diferentes, se são perpendiculares e em que ponto elas se encontram?

Em seguida, discutirão em pequenos grupos as observações feitas. O grupo deve registrar, em uma planilha, essas observações que serão discutidas com toda a turma, de maneira a sistematizar e generalizar essas observações realizadas.

Figura geométrica Plana	Ângulos			Diagonais		
	Possui ângulos congruentes dois a dois	Possui 2 ângulos retos	4 ângulos retos	Diagonais de mesma medida	Diagonais perpendiculares	Diagonais que se cortam no ponto médio
Quadrado						
Retângulo						
Losango						
Paralelogramo						
Trapézio						

Fonte: Adaptada de PONCE, 2004, p.73.

Essas são algumas possibilidades de trabalho com a geometria plana. As indicações permitem que os estudantes pensem e coloquem em jogo os conhecimentos que foram adquirindo em cada ano do ciclo, sem deixar de trabalhar a comunicação, o registro, a sistematização, chegando a generalizar os conceitos, fazendo uso das propriedades das figuras geométricas planas.

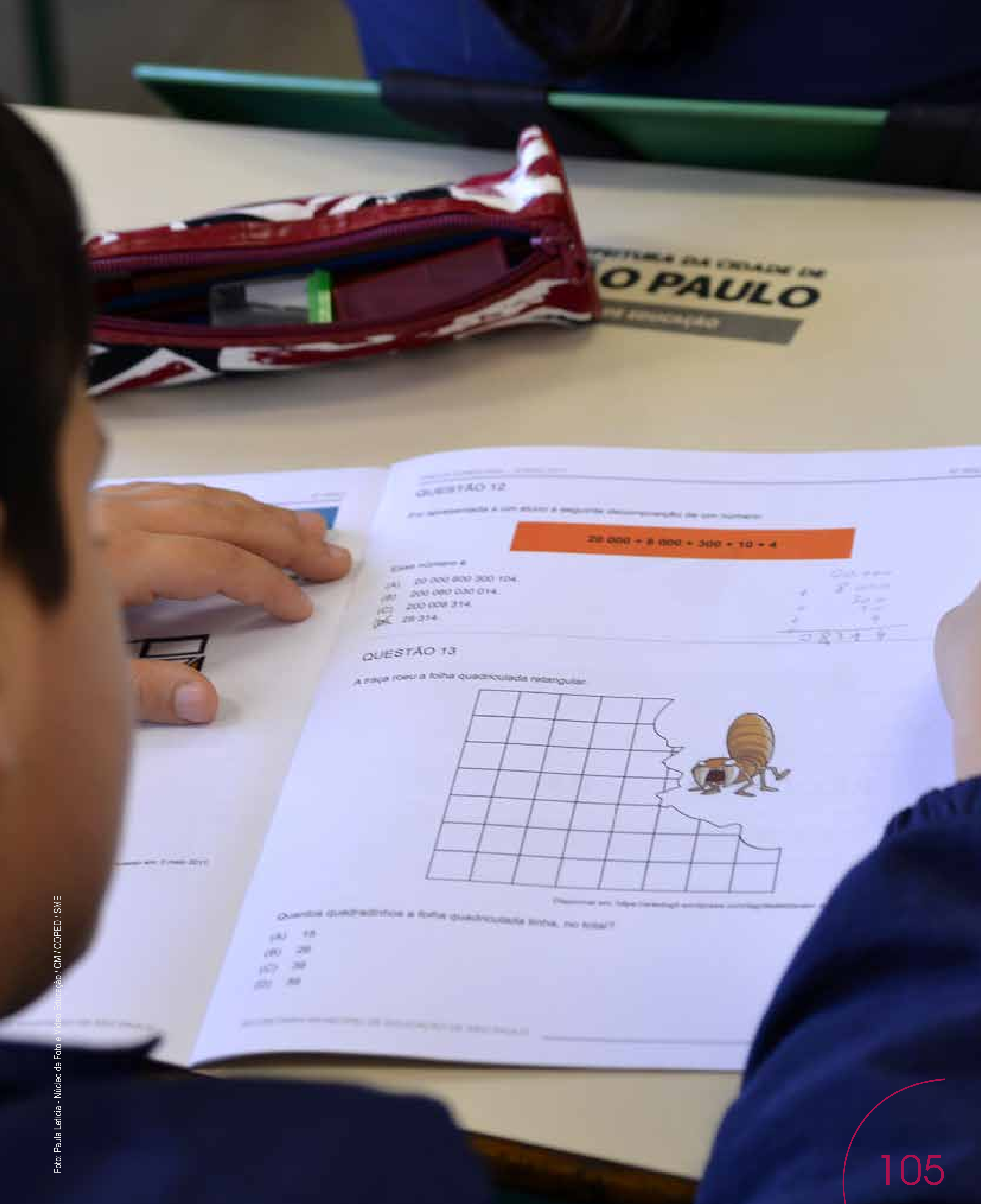


Foto: Paula Letícia - Núcleo de Foto e Vídeo Educação / CM / COPED / SME

Eixo Probabilidade e Estatística

Estatística no Ensino Fundamental

Reflexões iniciais sobre o ensino da Estatística

Todos os dias, deparamo-nos com inúmeras informações apresentadas por meio de símbolos, gráficos e tabelas. Para compreender essas informações, posicionamo-nos diante delas, analisando, criticando e tomando decisões, pois esses são conhecimentos necessários para o letramento estatístico, considerados imprescindíveis para a formação do cidadão e para vida em sociedade.

Como você aprendeu Estatística? Em qual ano do seu processo de escolarização?

Pensando no seu processo de formação, o que você tem ensinado de Estatística aos estudantes? Com que finalidade? Reflita sobre essas questões articulando-as à leitura do texto.

Durante muito tempo, a Estatística ocupou um espaço secundário nos currículos de Matemática, por isso podemos afirmar que muitos de nós, professores, tivemos o contato mais aprofundado com este eixo somente no Ensino Superior. Atualmente, devido a sua relevância social, estudos apontam a importância do desenvolvimento do pensamento estatístico desde muito cedo. Smole, Ishihara e Chica (2009) destacam que os estudantes desenvolvem noções rudimentares de estatística ainda na Educação Infantil, realizando pequenas pesquisas e construindo tabelas e gráficos para organizar os dados. A estatística no Ensino Fundamental foi proposta desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), organizada no bloco de conteúdo denominado “Tratamento da Informação”. Alguns documentos posicionam-se sobre o tema, defendendo que o trabalho com a Estatística envolve: a leitura e interpretação de informações estatísticas, coleta, organização, resumo e apresentação de dados, construção de tabelas e gráficos, cálculo e interpretação de medidas de tendência central e de dispersão.

Hoje em dia, em de nossas tarefas diárias, precisamos coletar, organizar, representar, interpretar para analisar dados e informações em uma variedade de contextos.

Considerando a sua experiência docente reflita:

Essas habilidades são exploradas como deveriam ser no Ensino Fundamental?

Podemos afirmar que aprender Estatística se limita a interpretar e analisar dados?

Comumente, o ensino de Estatística, de maneira equivocada, tem sido restrito à leitura e interpretação de gráficos e tabelas, renegando as próprias orientações curriculares. O Currículo da Cidade evidencia, para este eixo estruturante, que, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, os estudantes podem envolver-se em pesquisas de temas de seu interesse, por exemplo: quais são os seus brinquedos preferidos? Quais são as frutas mais aceitas no horário do recreio? Qual meio de transporte utilizam para ir à escola? Curiosidades como essas podem proporcionar situações de aprendizagem que compreendam as habilidades de coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados. Assim, a Estatística pode ser introduzida por meio de questões simples, mas significativas às crianças e adolescentes.

Embora se apresente como uma proposta, relativamente tranquila de ser desenvolvida pelo professor, o processo de mediação é fundamental. Dessa forma, apresentamos a seguir a sugestão de um roteiro de trabalho que pode se constituir como uma etapa de um projeto ou, até mesmo, uma sequência de atividades.

Roteiro de trabalho para o ensino da Estatística

É comum que os estudantes demonstrem disposição em levantar dados, construir gráficos e observar fenômenos. A partir de um tema de interesse, eles poderão envolver-se em uma pesquisa. Entretanto, pesquisar, atividade inerente à Estatística, requer planejamento de maneira que os dados coletados, com rigor, possam ser tratados e sistematizados a partir de uma linguagem própria. Vejamos como o professor pode planejar esse processo.

1. **Definição do tema ou assunto** - Refere-se ao momento de escolha dos temas e/ou assuntos do cotidiano dos estudantes. O professor poderá negociar o tema com a turma.
2. **Leituras sobre o tema** - Os estudantes pesquisam informações sobre o tema e realizam discussões para definir quais aspectos específicos pretendem pesquisar do tema escolhido.
3. **Organização dos trabalho** - Discutir e registrar como irão organizar os trabalhos (distribuir tarefas, definir responsabilidades e etc.).
4. **Objetivos e público-alvo** - Definir os objetivos e o público-alvo da pesquisa de campo, ou seja, os entrevistados. Os estudantes levantam hipóteses

sobre os possíveis resultados para compará-los com os resultados finais. Definir o público-alvo ajudará a elaborar as perguntas.

5. **Instrumentos de pesquisa** – Elaborar com os estudantes questões curtas e objetivas, cujas respostas são passíveis de mensuração. As respostas em forma de alternativas facilitarão a compreensão dos entrevistados e a tabulação posterior dos dados.
6. **Coleta de dados** – Discutir com os estudantes como se apresentar ao entrevistado, explicar os objetivos da pesquisa e perguntar se está disposto a participar da entrevista. A princípio, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, as crianças podem fazer perguntas a dois ou três colegas, satisfazendo sua curiosidade inicial. A seguir, a pergunta poderá ser estendida para toda turma. Além disso, podemos provocar a curiosidade com novas questões: O grupo de meninos terá a mesma preferência que o grupo de meninas? Se investigarmos a preferência dos pais, teremos o mesmo resultado para todo o grupo das crianças?
7. **Conteúdos matemáticos** – Conforme o nível da turma, será necessário avançar nos conteúdos matemáticos. Contagem, intervalo, razão, fração, ângulo, cálculos, proporção e porcentagem podem ser úteis.
8. **Tabelas e gráficos** - Antes de os estudantes organizarem os dados e elegeram a melhor forma de representação, pode-se discutir com eles que as tabelas organizam informações em linhas e colunas, enquanto os gráficos usam imagens (barras, setores, linhas ou elementos pictóricos). Alguns materiais são úteis nesta fase do trabalho, como papel quadriculado, régua, transferidor e compasso. As tecnologias digitais também podem ser um recurso valioso. Não podemos esquecer que existe uma variedade de tipos de gráficos (de barra, de setor, de linha ou elementos pictóricos) e tabelas (simples e de dupla entrada), ambos utilizados a partir da natureza das informações a serem comunicadas. É importante proporcionar aos estudantes uma diversidade de situações em que possam interpretar e construir tabelas e gráficos, avançando em sua complexidade.
9. **Relatório** – Mesmo nos anos iniciais, o professor pode produzir com os estudantes um relatório com a descrição dos objetivos da pesquisa, como os dados foram coletados, o nome dos pesquisadores e as tabelas ou gráficos produzidos com a representação dos resultados.
10. **Divulgação** – Os estudantes divulgam os resultados da pesquisa, por exemplo, para outras turmas da escola, para os familiares ou na comunidade local. Podem ser utilizados cartazes, cópias, exposições e seminários, entre outros.
11. **Análise crítica** – A pesquisa não se esgota na produção de tabelas e gráficos, mas os estudantes precisam aprender a relacionar os dados, refletir sobre os resultados e criticá-los. As análises críticas da turma podem constar em

um relatório produzido coletivamente. Nesta etapa é importante que os estudantes sejam estimulados a comunicar oralmente ou por escrito o que perceberam sobre as informações contidas em tabelas e gráficos.

Professor, leia os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do eixo Probabilidade e Estatística previstos para o ano que você leciona e articule-os às etapas apresentadas no roteiro de trabalho. Verifique, também, se alguns projetos referentes ao TCA (Trabalho Colaborativo de Autoria) podem ser apoiados por pesquisas.

Este roteiro de trabalho pode ser utilizado nos diferentes anos do Ensino Fundamental. Conti (2009) diz que o processo de pesquisa que antecede a construção e interpretação de gráficos é um componente do letramento estatístico, pouco valorizado nos livros didáticos e que, muitas vezes, abordam a tabela pronta e solicitam apenas a transformação dela em um gráfico, sem engajar os estudantes em um importante processo de compreensão de aspectos de sua realidade e realização.

Ao longo do Ensino Fundamental, a construção de gráficos deve evoluir em complexidade, de modo que os estudantes avancem nas representações, no conhecimento matemático e na linguagem estatística para comunicar resultados, utilizando termos como maior e menor frequência, por exemplo.

Leia o artigo "O trabalho com o Tratamento da Informação no 2º ano do Ensino Fundamental: uma experiência em sala de aula com a construção de tabelas e gráficos" das autoras Priscila Bernardo Martins e Julia de Cássia Pereira do Nascimento. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5715_3555_ID.pdf

A complexidade na interpretação de gráficos

Como gráficos e tabelas estão sempre visíveis na mídia, parece que é um conhecimento muito simples e que todos são capazes de entender. Será que isso é verdade? Reflita a respeito e continue a leitura do texto.

O desenvolvimento do pensamento estatístico contempla a leitura, a comparação e a interpretação de dados apresentados em tabelas e gráficos. Questionamentos sobre o título (que indica o que está sendo representado), a fonte (que revela a origem das informações) e a legenda dos gráficos (o que significa cada cor, por exemplo), podem ajudar os estudantes na leitura e interpretação das informações, como também a observarem certas regularidades. Por exemplo, que em um gráfico de colunas a altura é que mostra a variação de quantidade e não a largura das barras. Já no gráfico de linhas, os intervalos entre as marcações são sempre do mesmo tamanho, para garantir a proporcionalidade das informações apresentadas.

A complexidade na interpretação de gráficos foi abordada nos estudos de Curcio (1987). De acordo com o autor, os gráficos podem ser vistos como um tipo de texto e sua leitura pode ser classificada em três níveis: leitura de dados, leitura entre os dados e leitura além dos dados.

No primeiro nível, a leitura de dados é realizada de forma literal, não ocorre uma interpretação.

No segundo nível, ler entre os dados, o leitor precisa fazer a leitura de informações que não estão explícitas para interpretar o gráfico. Neste nível, o estudante deve combinar e integrar informações, além de identificar relações matemáticas a partir de algum conhecimento prévio sobre o assunto tratado no gráfico. Este é o nível mais comum na compreensão de gráficos.

No terceiro nível, ler além dos dados, o estudante deve conseguir responder questões, cujas respostas requerem o uso de informações implícitas no gráfico, extrapolando, predizendo ou fazendo inferências.

Com base nos níveis de leitura de gráficos definidos por Curcio (1987), analise as questões do gráfico a seguir, categorizando-as como leitura de dados, leitura entre dados ou leitura além dos dados:

1. O que representa este esquema?

2. Qual a merenda preferida dos estudantes?

3. Quantos estudantes preferiram a fruta?

4. Quantos estudantes estudam nesta turma?

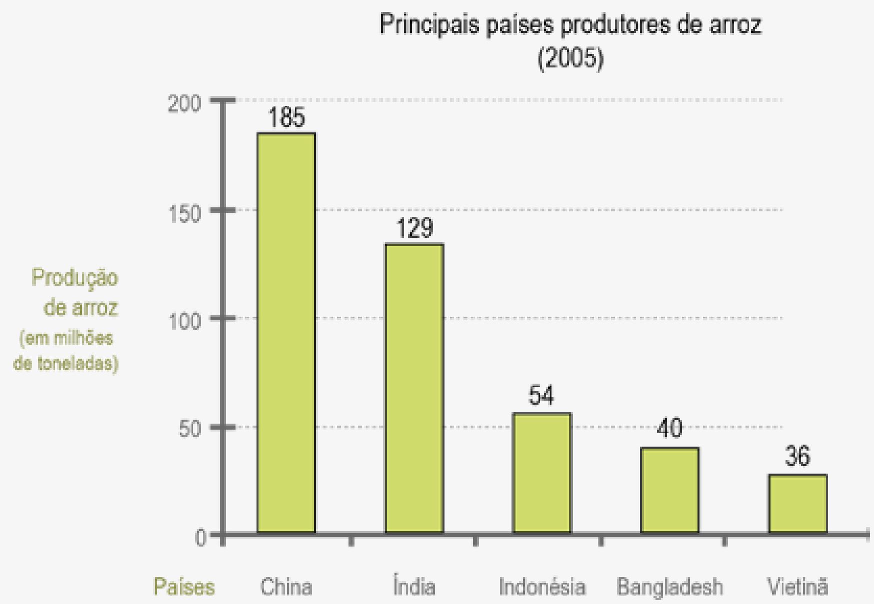
5. A representação foi feita com figuras. De que outra forma poderíamos fazer este quadro?

Disponível em: http://vamoscontar.ibge.gov.br/atividades/ensino-fundamental-1-ao-5/33-leitura-de-dados.html. Acesso em 10 jan. 2018.

Diversos estudos apontam que os estudantes no Ensino Fundamental atingem apenas o segundo nível no que se refere à leitura e à interpretação de gráficos. Fernandes e Morais (2011) realizaram um estudo com 108 estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental. Observe um dos gráficos apresentados aos estudantes:

Principais países produtores de arroz

Em 2005, foram produzidos 619 milhões de toneladas de arroz em todo o mundo. O gráfico de barras que se segue apresenta, em milhões de toneladas, a produção dos principais países produtores de arroz.



1- Em 2005, que quantidade de arroz produziu a Indonésia?

2- Qual a percentagem de arroz produzido pela Índia em 2005?

3- O Brasil também é produtor de arroz. Em 2005, a produção brasileira foi, aproximadamente, 7% da produção chinesa. A produção brasileira representa mais ou menos do que 5% da produção mundial de arroz? Justifique a sua resposta.

Disponível em: http://www.almanaquedoarroz.com.br/site/13/pg10.asp. Acesso em: 10 jan. 2018.

Na primeira questão, que requer a leitura literal do gráfico (ler os dados), 90% dos estudantes acertaram a resposta. Na segunda questão (ler entre os dados), apenas 1/3 dos estudantes responderam corretamente e na questão de número três, que também exigia a leitura entre os dados, menos da metade dos estudantes acertaram.

O estudo incluiu o gráfico de barras, o gráfico de setor e o gráfico de linhas. Não houve uma diferença significativa de desempenho dos estudantes na leitura e interpretação dos diferentes tipos de gráficos. Em relação aos três níveis de compreensão descritos por Curcio (1987), a maioria dos estudantes é capaz de ler os dados (nível 1), mas menos de $^{1}/_{3}$ conseguem ler entre os dados e ler além dos dados.

O estudo mostra que o desempenho dos estudantes está relacionado ao seu fraco desempenho na leitura e interpretação de gráficos estatísticos e, também, na ausência de conhecimentos matemáticos.

Para resolver as questões, os estudantes recorrem à regra de três simples, principalmente nas questões localizadas no nível "ler entre os dados". Embora o recurso às proporções, como igualdade de duas razões, torne mais explícito o raciocínio proporcional, a ênfase dada pelos professores à regra de três simples, provavelmente, leva os estudantes a utilizarem esta regra para resolverem as questões propostas.

Agora que você conhece os diferentes níveis de leitura de gráficos reflita:

Qual a importância de propor perguntas que envolvem a leitura de dados, leitura entre dados ou leitura além dos dados no processo de interpretação dos gráficos? Quais são as implicações do processo de construção de gráficos para o desenvolvimento das habilidades leitoras? Para você, o estudante que participa do processo de construção do gráfico terá um desempenho melhor na sua interpretação?

Pense a respeito dessas questões e continue a leitura do texto.

O ensino de Estatística para a autonomia dos estudantes

Nos anos finais do Ensino Fundamental, os conhecimentos estatísticos devem ser aprimorados, ampliados e novos conceitos acrescentados. Trabalhar Estatística é um desafio para o professor de Matemática, buscar aporte teórico e novas metodologias de ensino podem favorecer a compreensão e um maior engajamento por parte dos estudantes. Construir gráficos e tabelas vinculados a contextos muito distantes dos estudantes pode proporcionar algumas aprendizagens, mas não garante engajamento em questões sociais relevantes para a comunidade e o desenvolvimento da autonomia com vistas à tomada de decisões.

Nesse sentido, a Educação Estatística pode contribuir de maneira bastante significativa, pois permite que o professor selecione temas que sejam relevantes, à sociedade atual, trazendo, a partir das discussões feitas em cima de temas relevantes, como poluição dos rios e mares. Uma Educação Estatística crítica requer do professor uma atitude de respeito aos saberes que o estudante traz à escola, que foram adquiridos por sua vida em sociedade. Em nosso modo de entender, é necessária a discussão de temas, como a poluição dos rios e mares, os baixos níveis do bem-estar das populações, o abandono da saúde pública, entre outros; questões que estão em manchetes de jornais diários e revistas e em reportagens de televisão. Trabalhando a análise desses temas que estão sempre envolvidas em índices, tabelas, gráficos etc., podemos viabilizar a formação de cidadãos críticos, éticos e reflexivos (LOPES, 2008, p. 62).

Problemas de Combinatória

Introdução

Quando nos propomos a analisar os significados dos problemas que envolvem o Campo Multiplicativo, certamente, nos deparamos com um tipo de problema pouco explorado no Ensino Fundamental, denominado problema de combinatória. Esse tipo de problema envolve a contagem de objetos ou pessoas, permitindo desenvolver o “pensamento combinatório”.

Desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, as indicações para o trabalho com esse tipo de problema surgem com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de Matemática (1997), que, à época, representavam um avanço na abordagem de problemas de combinatória. Nesse documento, a proposta apresentava situações em que era preciso decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis. O documento propunha uma abordagem que não estivesse relacionada a uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

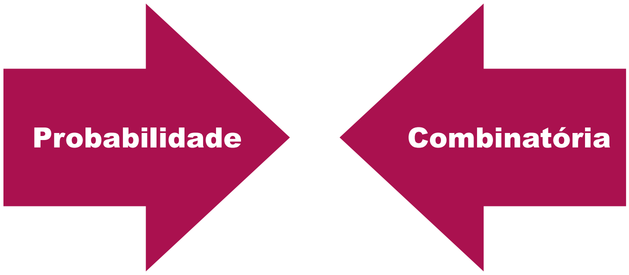
Entretanto, não são apenas os documentos curriculares que apresentam propostas para o trabalho com esse tipo de problema. Há muitos pesquisadores internacionais e nacionais que defendem essa posição.

Você trabalha com esse tipo de problema com os estudantes? Em que ano(s) ou ciclo da escolaridade? Justifique o motivo do seu trabalho ou a falta de abordagem desse tema.

Autores, como Borba (2010), afirmam que as situações que envolvem o significado de combinatória constituem-se em um verdadeiro problema, de acordo com as concepções de educadores matemáticos sobre o tema. Comentam que esses problemas envolvem uma situação que abarca dados e conhecimentos que possibilitam sua solução, mas que, no início, não há uma estratégia que possibilita sua resolução. Isso implica em uma análise mais cuidadosa do que é colocado no enunciado, do que se deseja determinar e das formas que permitem chegar à resposta esperada.

Você já ouviu dizer que há uma estreita relação entre a combinatória e a probabilidade? Veja o que diz o texto a seguir sobre isso.

O levantamento de casos possíveis de situações combinatórias auxilia na análise de probabilidades, pois é necessário pensar em probabilidades quando se julga o que seja provável, improvável e impossível. A probabilidade pode auxiliar a diferenciar o que acontece na realidade e o que é possível acontecer. Essas constatações levam à percepção de que a combinatória é estreitamente ligada à probabilidade.



Raciocínio Combinatório

Afinal, o que você entende por raciocínio combinatório? Anote suas ideias sobre o assunto e amplie os seus conhecimentos a partir da leitura do texto.

O raciocínio combinatório envolve um modo de pensar muito presente na análise de situações em que, dados determinados conjuntos, devem-se agrupar os elementos de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou de ordenação) e determinar (direta ou indiretamente) o total de agrupamentos possíveis.

Esse modo de pensar está estreitamente associado às situações do cotidiano, como a organização de equipes e de campeonatos esportivos, e também às situações contidas em outras áreas do conhecimento, como na nutrição, nas combinações de elementos de categorias diversas para equilíbrio alimentar. Além disso, as situações que envolvem combinatória desenvolvem um raciocínio de caráter hipotético dedutivo, base para o raciocínio científico, no qual é possível isolar variáveis, manter algumas constantes e variar outras.

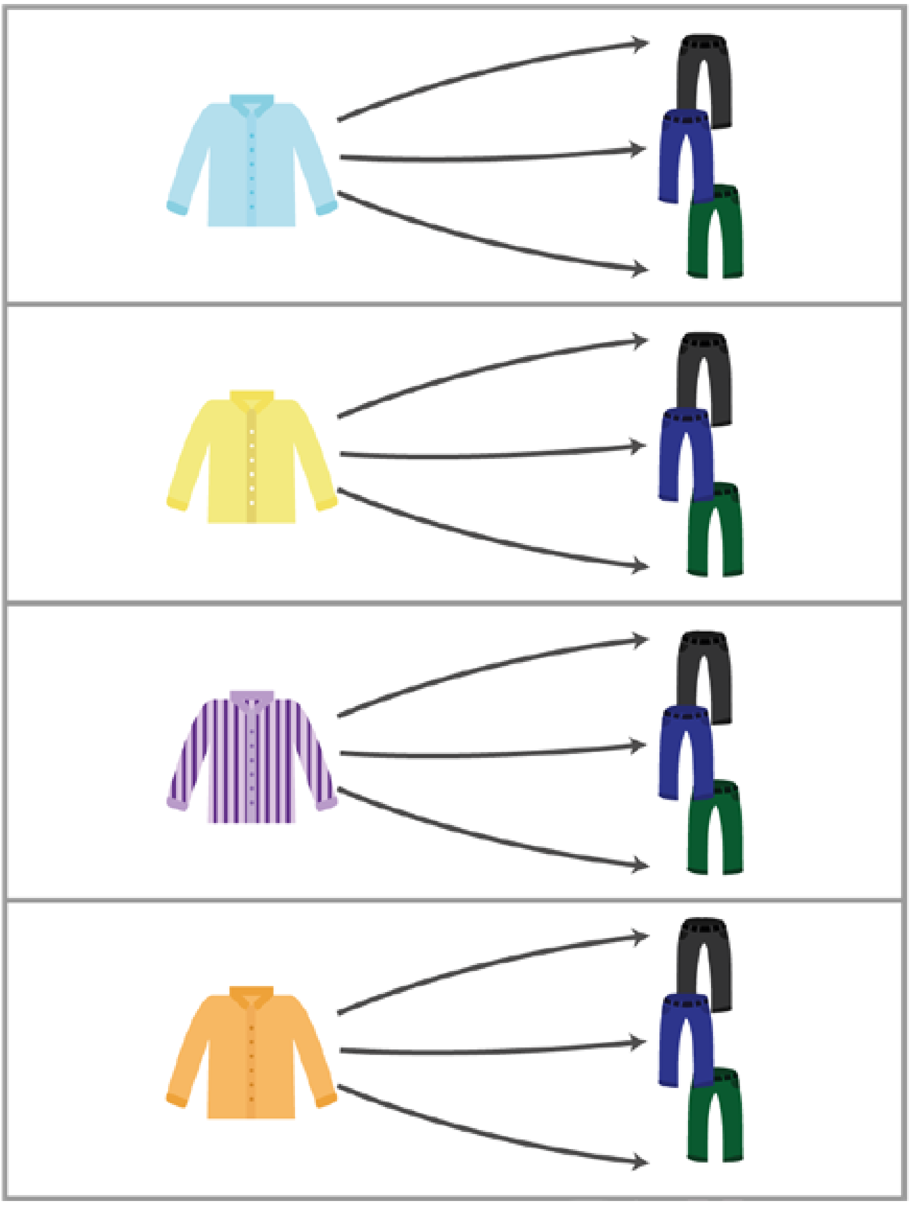
E na escola? Em que ciclo você acha que seria importante desenvolver esse tipo de problema? Como você acha que os estudantes podem resolver os problemas de combinatória?

Na escola, a resolução de problemas combinatórios pode ser realizada por meio de desenhos, de listagens, de árvores de possibilidades e com uso de fórmulas numa etapa mais avançada da escolaridade, no Ensino Médio. Em particular, a árvore de possibilidades pode proporcionar a compreensão de diferentes situações combinatórias, pois permite observar sistematicamente quais as possíveis combinações e selecionar os casos válidos para cada situação encontrada.

Na sequência, apresentamos três tipos de representações diferentes para a resolução do problema a saber: João tem 4 camisas (uma azul, uma amarela, uma listrada e uma laranja) e 3 calças (uma preta, uma verde e uma azul). De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir combinando todas as camisas com todas as calças?

Tabelas de dupla entrada

Árvore de possibilidades



Listagens

Camisa	Calças
Azul	Verde
	Preta
	Azul
Amarela	Verde
	Preta
	Azul
Listrada	Verde
	Preta
	Azul
Laranja	Verde
	Preta
	Azul

Ideias envolvidas em Problemas de Combinatória

No Ensino Fundamental, os problemas de combinatória podem envolver as ideias de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Como já foi comentado em outros textos deste material, não se pretende estabelecer nomenclatura que permita aos estudantes identificar as diferenças entre essas ideias, nem fazer uso de fórmulas como as que são ensinadas no Ensino Médio, sem discussão das ideias. O que se pretende é que os estudantes explorem situações contextualizadas e as resolvam por meio de procedimentos pessoais, chegando a alguma sistematização no Ciclo Autoral.

Pessoa e Borba (2009), com base em pesquisas empíricas, argumentam que se deve trabalhar em todos os níveis e modalidades de ensino com todos os significados da combinatória, ou seja, o "produto cartesiano"[3], as permutações, os arranjos e as combinações, pois há relações básicas da combinatória dispostas nesses quatro significados. Para as autoras, o contato com essas situações variadas pode levar ao desenvolvimento do raciocínio combinatório. Acreditam, ainda, no trabalho contínuo com esses significados e não consideram adequada uma ênfase inicial ao

3 Esta nomenclatura é usada por alguns autores e neste documento será usada entre aspas. Há controvérsias sobre o uso dessa nomenclatura, pois um produto cartesiano envolve pares ordenados e nos problemas de combinatória que trabalham com essa ideia os pares não são ordenados necessariamente, ou seja, tanto faz tomar um sorvete de duas bolas, uma de coco e outra de morango e representar essa combinação com o par (c,m) ou (m,c). Neste caso, os pares não precisam ser ordenados, logo o conjunto desses pares não formaria um produto cartesiano.

"produto cartesiano" que, no geral, é o tipo de situação trabalhada desde o Ciclo de Alfabetização, deixando para o Ensino Médio os outros significados.

O desenvolvimento de situações que envolvem os quatro significados de combinatória podem levar os estudantes a observar semelhanças e diferenças entre diversos tipos de problemas - tanto em termos do número de conjuntos, a partir dos quais os elementos devem ser escolhidos, como da ordenação, implicando, ou não, em possibilidades distintas, ou ainda da possibilidade, ou não, de repetição de elementos e, em casos especiais, de condições impostas – como certos elementos ocupando determinadas posições.

Esse tipo de problema permite o trabalho com relações e propriedades invariantes (de escolha, de ordenação, de repetição de elementos, de condições impostas à disposição desses elementos).

A seguir, apresentaremos um exemplo de cada tipo.

Problemas de "produto cartesiano"

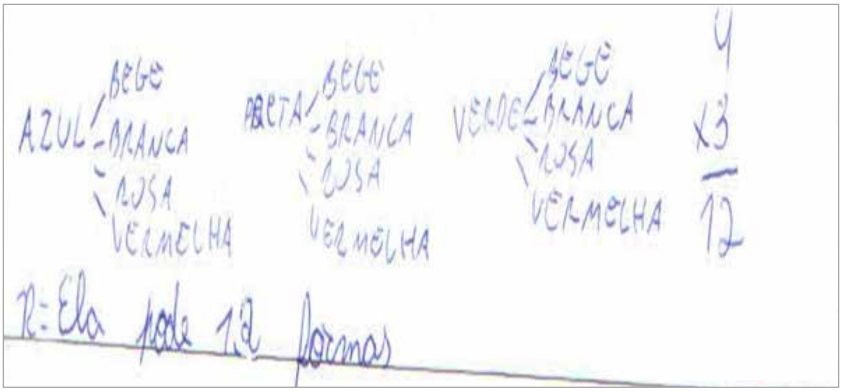
Os problemas de "produto cartesiano" são trabalhados desde o Ciclo de Alfabetização, como problemas de combinatória e fazem parte do Campo Multiplicativo. No entanto, são trabalhados como se fossem os únicos tipos de situações de combinatória. De fato, o que caracteriza esse tipo de problema de combinatória é a combinação entre todos os elementos de um dado conjunto, com todos os elementos de outro conjunto.

Problema 1:

Marcia tem 3 blusas (uma azul, uma preta e uma verde) e 4 calças (uma bege, uma branca, uma rosa e uma vermelha). De quantos modos diferentes ela pode se vestir combinando todas as blusas com todas as calças?

Neste problema, cada uma das 3 blusas pode ser combinada com cada uma das 4 calças, totalizando 12 combinações. No geral, esse tipo de problema já vem sendo explorado em livros didáticos e em avaliações externas e incorporado na prática dos professores. As crianças do Ciclo de Alfabetização costumam ter bom desempenho nesse problema. No entanto, de início, é frequente fazerem a adição dos valores apresentados em cada conjunto e, só depois, desenhando ou escrevendo as possibilidades, é que vão percebendo que o número obtido não corresponde à soma dos elementos dos dois conjuntos, mas sim ao produto do número de blusas pelo número de calças. Temos assim, dois conjuntos diferentes a partir dos quais se deve combinar cada um dos elementos de um conjunto, com todos os elementos de outro conjunto.

Na sequência, apresentamos um exemplo de resolução de estudante do quarto ano do Ciclo Interdisciplinar, da Rede Municipal de Ensino de São Paulo.



Fonte: Arquivo da professora Esther Maria Freixedelo Martins.

Figura 44 - Resolução do problema 1

A partir da observação de vários casos, em que o número de possibilidades geradas por conjuntos com n e com m elementos, respectivamente, pode ser determinado pelo produto n x m, há indicativos de que os estudantes, a partir do Ciclo Interdisciplinar generalizam a situação usando a multiplicação.

As relações invariantes dos "produtos cartesianos" (em qualquer contexto utilizado) são: as escolhas são efetuadas a partir de dois ou mais conjuntos distintos e o número total de possibilidades pode ser obtido por um produto do número de elementos de cada um desses conjuntos distintos. O princípio fundamental da contagem justifica esse produto, uma vez que há 3 possibilidades de escolha de blusas e 4 possibilidades para a escolha de calças, resultando no produto 3 x 4.

Você já ouviu falar do princípio fundamental da contagem? Sabe como pode ser enunciado?

O princípio fundamental da contagem pode ser enunciado da seguinte forma: se há um acontecimento formado por diversas etapas em que conhecemos o número de possibilidades de cada uma dessas etapas se realizarem, multiplicando todos esses números teremos a quantidade de possibilidades de o acontecimento completo se realizar.

Em seguida, discutiremos os problemas de combinatória que envolvem a ideia de Permutação.

Problemas de Permutação

A situação, a seguir, envolve o significado de permutação. Analise-a.

Problema 2:

Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) você pode formar, usando as letras da palavra BELA?

Qual a diferença entre os problemas de permutação e de “produto cartesiano”?

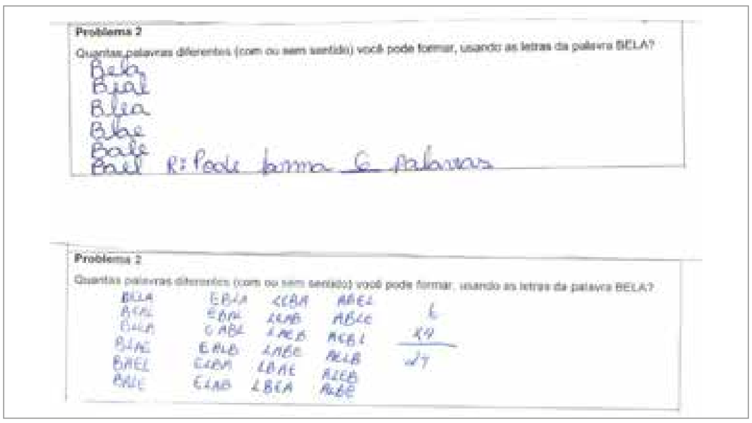
O problema 2 envolve a ideia de permutação simples, em que as letras se agrupam de 4 em 4. Esses agrupamentos se diferenciam somente pela ordem das letras. Como são 4 letras, temos 4 posições de cada letra:

A palavra BELA tem 4 letras. Pelo princípio fundamental da contagem, na escolha da primeira letra há quatro possibilidades e, sem repetir nenhuma letra, há 3 possibilidades de escolha da segunda letra; duas possibilidades de escolha da terceira letra e uma possibilidade de escolha da quarta letra. Vejamos:

BELA, BEAL, BLAE, BLEA, BALE, BAEL, EBLA, EBAL, EABL, EALB, ELAB, ELBA, LABE, LAEB, LBEA, LBAE, LEAB, LEBA, ABLE, ABEL, ALBE, ALEB, AELB, AEBL.

No geral, no Ciclo Interdisciplinar, os estudantes fazem as permutações e depois contam o total de agrupamentos. No Ciclo Autoral, geralmente, o total de permutações é calculado por 4x3x2x1 = 24.

A seguir, um exemplo de resolução incompleta de estudante do quarto ano do Ciclo Interdisciplinar, da Rede Municipal de Ensino de São Paulo e outra correta.



Fonte: Arquivo da professora Esther Maria Freixedelo Martins.

Figura 45 - Resolução do problema 2

Nem sempre os estudantes conseguem identificar todas as permutações das letras, embora mostrem que compreendem a situação. Quando o professor estimula mais a procura de outras palavras, permutando as letras iniciais, os estudantes ampliam seu repertório e mostram estratégias de obtenção e controle das respostas.

Você percebeu que os problemas de "produto cartesiano" envolvem dois conjuntos e são usados todos os elementos de cada um desses conjuntos, e os problemas de permutação envolvem apenas um conjunto em que os elementos mudam de posição?

Vamos, agora, discutir outro tipo de problema de combinatória, os problemas que envolvem o significado de arranjo.

Problemas de Arranjo

A situação, a seguir, envolve o significado de arranjo.

Problema 3:

Em uma feira de alimentos, quatro vendedoras se candidataram para uma comissão de três pessoas, encarregadas de arrumar os alimentos perecíveis diariamente: Ana, Beatriz, Celina, Daniela. O critério é que a comissão seja formada pelas 3 vendedoras mais votadas pelas colegas da feira. De quantas maneiras diferentes podemos ter as três primeiras colocadas nessa votação?

Como já foi dito, essa situação envolve a ideia de arranjo. Neste caso, é preciso organizar as comissões, excluindo uma vendedora de cada vez e verificando as possíveis colocações das outras, totalizando 24 possibilidades. A ordem aqui é importante, pois o número de votos é diferente para cada vendedora.

- Três mais votadas entre as quatro candidatas

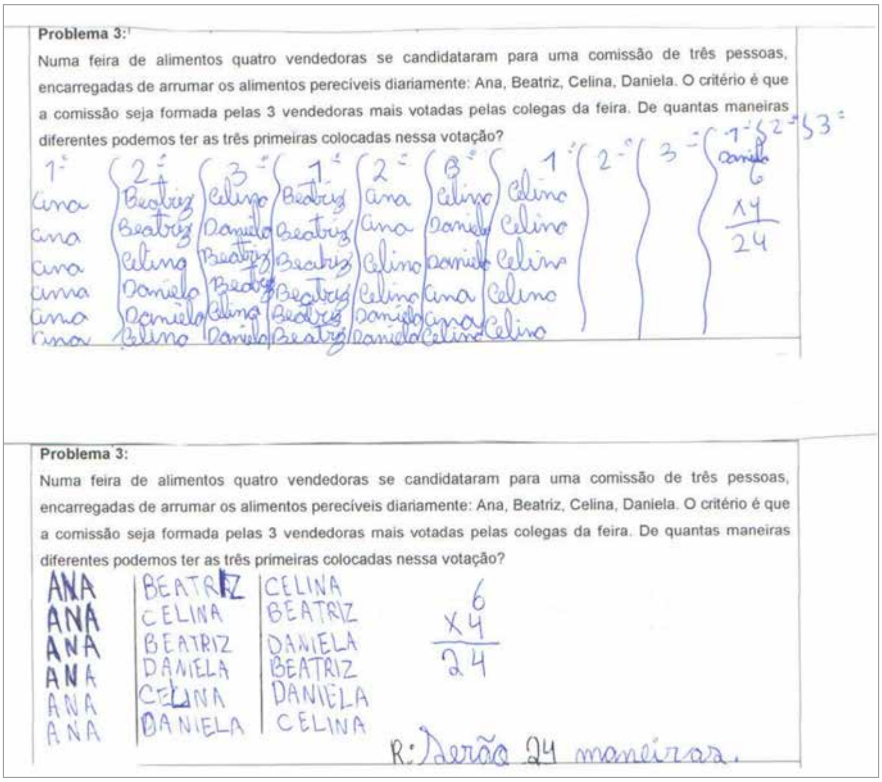
  A, B e C: (A, B, C); (A, C, B); (B, A, C); (B, C, A); (C, A, B); (C, B, A);
- Três mais votadas entre as quatro candidatas:

  A, B, e D: (A, B, D); (A, D, B); (B, A, D); (B, D, A); (D, A, B); (D, B, A);
- Três mais votadas entre as quatro candidatas

  A, C e D: (A, C, D); (A, D, C); (C, A, D); (C, D, A); (D, A, C); (D, C, A);
- Três mais votadas entre as quatro candidatas

  B, C e D: (B, C, D); (B, D, C); (C, B, D); (C, D, B); (D, B, C); (D, C, B).

Os problemas de arranjo são mais indicados para o Ciclo Autoral. O raciocínio envolve a escolha de m elementos dentre os n elementos de um único conjunto e que a ordem de escolha dos elementos gera possibilidades distintas. No entanto, crianças de 4º ano conseguem resolvê-lo, como é possível verificar no protocolo a seguir. A primeira indica a continuidade dos agrupamentos e a segunda faz o primeiro grupo e multiplica por 4.:


Problema 3:

Numa feira de alimentos quatro vendedoras se candidataram para uma comissão de três pessoas, encarregadas de arrumar os alimentos perecíveis diariamente: Ana, Beatriz, Celina, Daniela. O critério é que a comissão seja formada pelas 3 vendedoras mais votadas pelas colegas da feira. De quantas maneiras diferentes podemos ter as três primeiras colocadas nessa votação?

Problema 3:

Numa feira de alimentos quatro vendedoras se candidataram para uma comissão de três pessoas, encarregadas de arrumar os alimentos perecíveis diariamente: Ana, Beatriz, Celina, Daniela. O critério é que a comissão seja formada pelas 3 vendedoras mais votadas pelas colegas da feira. De quantas maneiras diferentes podemos ter as três primeiras colocadas nessa votação?

ANA	BEATRIZ	CELINA
ANA	CELINA	BEATRIZ
ANA	BEATRIZ	DANIELA
ANA	DANIELA	BEATRIZ
ANA	CELINA	DANIELA
ANA	DANIELA	CELINA

$6 \times 4 = 24$

R: Serão 24 maneiras.

Fonte: Arquivo da professora Esther Maria Freixedelo Martins.

Figura 46 - Resolução do problema 3

Você consegue perceber as diferenças e similaridades entre os problemas de arranjo e os de permutação? Descreva-as e continue a leitura do texto.

Em termos de escolha, arranjos e permutações são similares entre si, a partir de um único conjunto e da ordem dos elementos, determinando possibilidades distintas. Mas esses significados se diferenciam, pois nas permutações todos os elementos do conjunto são dispostos em ordens variadas e nos arranjos são escolhidos apenas alguns elementos do conjunto.

Assim, no problema 2, as 4 letras da palavra BELA trocaram de ordem, e a ordem dessas letras gerou possibilidades distintas, ou seja, todos os elementos do conjunto trocam de ordem, gerando possibilidades diferentes devido à escolha da ordem desses elementos. No problema 3, entre as 4 vendedoras foram escolhidas as 3 mais votadas e estas trocam de ordem, gerando possibilidades distintas, ou seja, em um conjunto de m elementos, apenas alguns são usados.

Vejamos, agora, os problemas de combinação.

Problemas de combinação

O problema 4 envolve o significado de combinação.

Problema 4:

Cinco jogadoras de um time de futebol (Andrea, Biloca, Cassia, Denise e Edani) se candidataram para formar uma comissão de duas representantes para conversar com o técnico do time. Quantas comissões diferentes podem ser formadas com essas jogadoras?

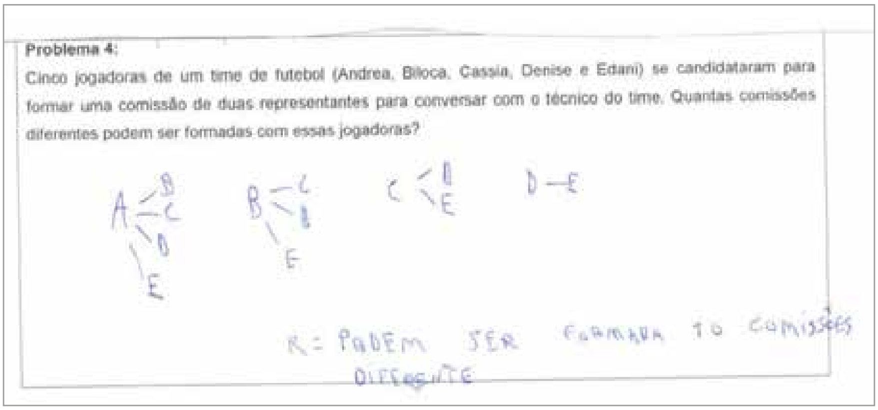
Esse problema envolve a ideia de combinação. Nesse caso, a ordem não importa. É preciso buscar as possibilidades de agrupamentos de dois elementos, levando em consideração, por exemplo, que a comissão formada pelos estudantes Andrea e Biloca é a mesma que a comissão formada por Biloca e Andrea, chegando às 10 comissões, indicadas a seguir:

(A,B); (A,C); (A,D); (A,E); (B,C); (B,D); (B,E); (C,D); (C,E);(D,E).

Nesse problema, também são escolhidos alguns elementos de um conjunto, mas, nesse caso, a ordem de escolha desses elementos não gera possibilidades distintas, ou seja, não importa. Para a escolha do primeiro elemento da comissão, temos 5 possibilidades e para a escolha do segundo temos 4, ou seja 5 x 4 = 20. No entanto, o produto deve ser dividido por 2, porque a comissão Andrea, Biloca é a mesma se for usada a representação (A, B) ou a representação (B, A).

As propriedades combinatórias observadas nas combinações são relações de escolha de elementos a partir de um conjunto maior, mas no que diz respeito à ordenação, a ordem da disposição dos elementos não gera combinações distintas.

A seguir, um exemplo de resolução de aluno do quarto ano do Ciclo Interdisciplinar, da Rede Municipal de Ensino de São Paulo.


Problema 4:

Cinco jogadoras de um time de futebol (Andrea, Biloca, Cassia, Denise e Edani) se candidataram para formar uma comissão de duas representantes para conversar com o técnico do time. Quantas comissões diferentes podem ser formadas com essas jogadoras?

Fonte: Arquivo da professora Esther Maria Freixedelo Martins.

Figura 47 - Resolução do problema 4

Você consegue descrever as similaridades e diferenças entre as ideias de arranjo, permutação, combinação e de “produto cartesiano”?

Como você deve ter observado, os arranjos, as permutações e as combinações utilizam elementos de um mesmo conjunto dado, diferentemente do “produto cartesiano” que utiliza todos os elementos de dois conjuntos distintos. A ordem de escolha dos elementos é característica das permutações e arranjos, mas não geram possibilidades distintas no caso das combinações ou “produtos cartesianos”.

Veja, agora, um quadro-síntese que pode possibilitar mais compreensão entre as similaridades e diferenças dos significados de combinatória estudados:

Significado	Número de conjuntos envolvidos	Importância da ordem da escolha dos elementos
“Produto cartesiano”	2	Não
Permutação	1	Sim
Arranjos	1	Sim
Combinação	1	Não

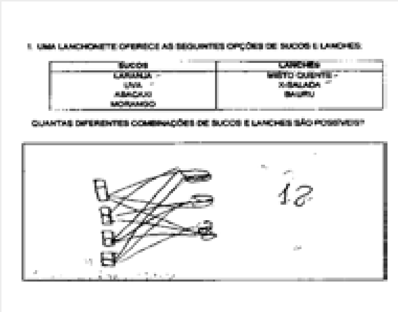
E o papel do contexto nesses tipos de problemas? Você já refletiu sobre isso? Consegue diferenciar os contextos de cada significado de combinatória? Pense sobre o assunto e continue a leitura do texto.

O contexto influencia a ideia de combinatória envolvida no problema. Os estudantes são desafiados a resolvê-lo e a compreensão permite a busca de estratégias para a resolução, sem efetivamente usar as operações fundamentais. No geral, nos Ciclos de Alfabetização e Interdisciplinar, eles chegam a respostas particulares, mas não conseguem esgotar todas as possibilidades relacionadas ao problema, até porque estão habituadas à ideia de que um problema tem uma única solução. Essas situações são desafiadoras para os estudantes, pois buscam as soluções por meio de procedimentos pessoais, percebendo que a combinatória pode ser conhecida como “a arte de contar”.

Analise como estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental resolvem os problemas de combinatória. Realize a análise a partir dos seguintes aspectos:

Descreva as estratégias de resolução apresentadas pelos estudantes;

Avalie se as estratégias foram válidas para chegar à resolução do problema.

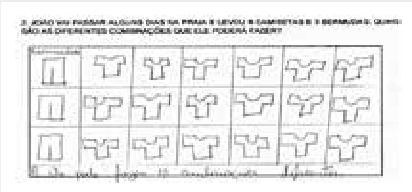


Registro 1

Fonte: ZARAN, 2013, p. 117.

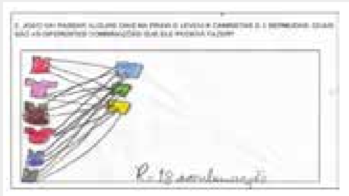
Registro 2

Fonte: ZARAN, 2013, p. 118.



Registro 3

Fonte: ZARAN, 2013, p. 119.



Registro 4

Fonte: ZARAN, 2013, p. 120.

Para terminar, analise o Currículo da Cidade e verifique nos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento como foram contemplados os problemas que envolvem raciocínio combinatório ao longo do Ensino Fundamental.

Para saber mais pesquise as produções do grupo de pesquisa GERAÇÃO, que investiga o ensino e a aprendizagem de combinatória no blog http://geracaoufpe.blogspot.com.br/ que contém artigos publicados em periódicos, livros e anais de congressos. Acesso em agosto de 2017.

Probabilidade

Introdução

Com a justificativa de atender à demanda social, o conceito de probabilidade foi introduzido nos currículos brasileiros, em 1997, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, no eixo Tratamento da Informação, mais timidamente nos anos iniciais do Ensino Fundamental e com mais ênfase nos anos finais. Borovcnik (2008) apresenta alguns argumentos em favor da introdução desse tema nos currículos. Um deles se refere ao julgamento probabilístico em que o autor afirma que apoia o pensamento racional do indivíduo na tomada de decisões em situações importantes da vida diária, como a tomada de decisões em função de resultados de exames médicos ou para decidir sobre um investimento, por exemplo. Outro argumento se refere ao raciocínio sobre incerteza como uma ferramenta importante no mundo atual, por exemplo, o conceito de risco e seu impacto nas tomadas de decisões diárias. Ele também apresenta, como argumento, que a probabilidade é essencial no entendimento de procedimentos inferenciais em estatística. Por último, afirma que a probabilidade oferece uma ferramenta para modelar e "recriar" a realidade, citando como exemplo que a física moderna não pode ser formulada sem referências a conceitos probabilísticos.

O autor afirma que o grande desafio que se coloca é ensinar probabilidade por meio de materiais e ferramentas projetados para encorajar a compreensão, focando na criação de aproximações de probabilidade que sejam acessíveis e motivadoras aos estudantes, com aplicações práticas apropriadas. No âmbito escolar, o autor sugere que o foco seja nas visões frequentista e subjetiva de probabilidade, pois muitos fenômenos aleatórios não são explicados única e exclusivamente por meio do modelo clássico de probabilidades, que se baseia em espaços igualmente prováveis. Considera ainda que existem fenômenos aleatórios cujas explicações matemáticas se dão por meio da observação da frequência com que ocorrem (visão frequentista) ou dependem do conhecimento daquele que arrisca o prognóstico probabilístico (visão subjetiva).

Reflita sobre algumas situações práticas do cotidiano que podem ser consideradas frequentistas ou subjetivas.

Um pouco de história sobre a probabilidade

Para você, como surgiu a probabilidade?

Você já ouviu falar que a teoria das probabilidades surgiu por causa dos jogos de azar?

Leia algumas informações a respeito.

A ideia de acaso surge na Antiguidade, com os jogos de azar e as crenças que existiam na época. Os povos que viviam na Mesopotâmia ou no Egito Antigo relacionavam a ideia do acaso com o sobrenatural. A relação do acaso com o sobrenatural perdurou ao longo do tempo. Os jogos de azar eram utilizados com objetivos de lazer, mas integravam uma dimensão mística do acaso.

Os primeiros estudos sistemáticos sobre Probabilidade foram elaborados por Girolamo Cardano no século XVI. Alguns autores acreditam que essa demora foi decorrente do fato que obras científicas que tratassem de uma possível sistematização de jogos de azar não seriam consideradas sérias, já que os jogos não eram vistos com bons olhos pelos sábios.

Além disso, consideram que os primeiros "dados de jogo" não possuíam um balanceamento perfeito e isso impedia que fosse percebida alguma regularidade dos eventos possíveis. Isso ocorria porque eles eram feitos de ossos de animais diferentes.

Outra causa do atraso da matematização do acaso está ligada à crença de que não seria prudente intervir no acaso, pois ele se encontrava no domínio divino, uma vez que se acreditava que os acontecimentos na Terra eram dirigidos pelos deuses. Os povos atribuíam o resultado do lançamento de um dado à manifestação da vontade dos deuses.

No âmbito da Filosofia, existem três diferenças com relação ao acaso que se entrelaçam: a) o conceito subjetivista pelo qual a imprevisibilidade e a indeterminação do evento casual são atribuídas à ignorância ou à confusão do homem; b) o conceito objetivista que atribui o evento casual à mistura e à interseção das causas; c) a interpretação moderna que considera o acaso como a insuficiência de probabilidades na previsão.

Os estudos de Piaget e Inhelder (1993) sobre a origem da ideia de acaso na criança permitem compreender como se dá o desenvolvimento da noção de probabilidade. Esses autores destacam os mesmos estágios definidos pela Filosofia na construção da ideia de acaso pela criança. Eles afirmam que nem tudo que está à nossa volta pode ser previsto de antemão com precisão, mas que, mesmo assim, os indivíduos, ao vivenciarem uma situação, arriscam uma predição na tentativa de compreendê-la e conviver com ela. Eles consideram que esse tipo de atitude leva a crer que o ser humano na idade adulta "possui" uma intuição de probabilidade. Os resultados dos estudos desses autores mostram que: o primeiro estágio de desenvolvimento da ideia de acaso pela criança (antes dos 7- 8 anos de idade) "se caracteriza pela ausência de operações propriamente ditas, isto é, de composição reversível;

os raciocínios em jogo permanecem então pré-lógicos e são regulados apenas por sistemas de regulações intuitivas" (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 294). Nesse estágio, "a criança nem sequer entrevê a possibilidade de um sistema que lhe permita achar, sem esquecer nenhuma, todas as combinações duas a duas, todas as permutações, ou todos os arranjos dois a dois realizáveis por meio de alguns elementos" (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 294). Eles afirmam que isso ocorre porque essas são operações multiplicativas particulares e as crianças, nesse estágio, não são capazes de compreender as operações aditivas e multiplicativas mais simples. Segundo eles, durante esse primeiro estágio, a criança não diferencia o possível do necessário. Seu pensamento oscila entre o previsível e o imprevisto, mas nada é para ela nem seguramente previsível, quer dizer, dedutível segundo um elo de necessidade; nem seguramente imprevisível, quer dizer, fortuito (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 294).

De acordo com esses autores, o período seguinte, dos 7-8 a 11-12 anos, marca a transformação da ideia de acaso. Ele "se caracteriza pela construção dos grupamentos operatórios de ordem lógica e numérica, porém num plano essencialmente concreto, ou seja, relativo a objetos manipuláveis representáveis no detalhe de suas relações reais" (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 294). Nessa fase, a descoberta da necessidade dedutiva ou operatória permite à criança conceber o caráter dedutivo de transformações fortuitas isoladas e de diferenciar o necessário do possível. Por outro lado, o encaixe operatório das partes complementares de um todo leva à disjunção "concreta". Essa disjunção concreta ocasiona a noção de duplas ou de múltiplas possibilidades, que implica todo julgamento de probabilidade (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 296).

Os autores concluem que é somente no terceiro estágio (após 11-12 anos) que o julgamento de probabilidade se organiza, "por uma espécie de choque em volta da operação sobre o acaso" (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 296). Nessa fase, "há a síntese entre o acaso e as operações, permitindo estas estruturar o campo das dispersões fortuitas em um sistema de probabilidades, por uma espécie de assimilação analógica do fortuito ao operatório" (p. 297). Para eles, chegar a esse resultado envolve dois processos correlatos. Por um lado, a construção dos sistemas combinatórios, a partir de um método que permite efetuar o conjunto das operações possíveis sobre um pequeno número de elementos. Isso leva o sujeito a executar algumas possibilidades particulares e sem ordenação. Por outro lado, o pensamento formal, que permite a construção de sistemas combinatórios, a descoberta das proporções. Isso leva à lei dos grandes números que aplica as relações de proporcionalidade às operações combinatórias e permite que o sujeito conceba a legitimidade de uma composição probabilística das modificações fortuitas, no sentido de uma dispersão proporcionalmente mais regular e, por conseguinte acessível – na sua totalidade, senão no detalhe – à previsão racional (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 297).

Segundo esses autores, ao atingir um ponto avançado na evolução individual acerca do acaso, as probabilidades baseadas nos grandes números assinalam "uma espécie de síntese entre a operação e o fortuito – após a antítese, a princípio radical, sentida no início do segundo período, e a não diferenciação própria do primeiro" (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 297).

Os estudos desses autores sobre probabilidade permitiram conclusões sobre raciocínio probabilístico associado com ideias de aleatoriedade, espaço amostral, combinações, eventos mais ou menos prováveis, distribuição de probabilidades e lei dos grandes números, entre outras.

A teoria das Probabilidades

Mesmo que o homem conviva com situações aleatórias durante toda a sua vida e que a noção de acaso tenha surgido com os jogos de azar, a teoria das probabilidades ocorreu bem mais tarde. Segundo Coutinho (1994), os primeiros estudos dedicados a esse tema foram iniciados por Girolamo Cardano (1547) e desenvolvidos posteriormente por Pascal e Fermat (1654), J. Bernoulli (1713), Bayes (1763), Laplace (1825) até os estudos de Kolmogorov (1933), que é tido como responsável pela teoria das probabilidades numa perspectiva axiomática.

Mesmo que o acaso tenha sido incorporado pela Matemática, em diferentes momentos históricos, as intuições que as pessoas têm de acaso não são compatíveis com os modelos matemáticos disponíveis. Nos dias de hoje, ainda são frequentes as crenças nas mais diversas explicações que as pessoas criam ou acreditam. Os modelos matemáticos de cálculo de probabilidade são considerados, muitas vezes, como contraintuitivos, mesmo no meio de pessoas com instrução.

A teoria das probabilidades, segundo vários autores, é um modelo matemático do acaso (GARDING, 1997). É um eixo da Matemática que estuda fenômenos envolvendo incerteza, utilizando ferramentas do cálculo matemático. Esses fenômenos são conhecidos como aleatórios, estocásticos não determinísticos, ou seja, são os que se repetidos em condições idênticas produzem resultados diferenciados, ou seja, não é possível determinar, com exatidão, qual o seu resultado (BAYER et al., 2005). Mesmo não sendo possível determinar, com exatidão, o resultado de fenômenos de natureza aleatória, a probabilidade procura fornecer o grau da possibilidade de acontecer um dado evento ou de um conjunto de eventos.

Pense em exemplos de situações do cotidiano próximas à realidade dos estudantes em que essas relações são possíveis.

Nesse sentido, a probabilidade supõe uma alternativa ou ela é a preferência por uma das alternativas possíveis. A afirmação “amanhã não choverá” exclui a menos provável, a alternativa “amanhã provavelmente choverá”. Dessa forma, a probabilidade surge sempre função de dois argumentos. A probabilidade é expressa por um número real entre 0 a 1.

No entanto, é preciso ter clareza do enfoque dado à probabilidade para que possamos utilizá-lo de modo pertinente no ensino. Os jogos de azar desempenharam um papel fundamental na formulação da teoria das probabilidades porque contribuíram para as primeiras aproximações com a ideia de acaso. Os jogos de azar levaram o homem à intuição das chances de se obter o resultado esperado e serviram como um dos meios para que se chegasse a um processo de avaliação mais elaborado. Entretanto, a probabilidade não pode ser resumida a esse contexto.

Segundo Coutinho (1994), os cálculos desenvolvidos por Pascal e Fermat acerca da avaliação de chances de ocorrência de um evento são considerados um avanço em relação à avaliação intuitiva que se fazia anteriormente. De acordo com BOROVCNIK (1991), o enfoque dado por esses autores lança uma luz sobre a aplicação correta da relação entre favorável e possível, embora não concretize nenhum progresso definindo um conceito para clarear a natureza própria da probabilidade.

A autora destaca que o enfoque combinatório que foi dado por Pascal e Fermat ao cálculo de probabilidades será retomado e ampliado por Christian Huygens (físico, geômetra e astrônomo holandês), com a publicação do primeiro tratado formal sobre probabilidades, em 1657.

Afinal, o que é probabilidade e quais são as abordagens de ensino?

Segundo Bayer *et al*. (2005), a conceituação de Probabilidade se aperfeiçoou ao longo dos anos e, atualmente, são consideradas três diferentes abordagens:

1. Abordagem Clássica

Segundo o autor, a abordagem clássica foi publicada pelo italiano Girolamo Cardano no livro Liber de ludo alea (Livro dos jogos de azar) em 1525. Cardano foi o primeiro a apresentar probabilidades na forma de “frações”. A utilização desta abordagem para se estabelecer probabilidades é direta, mas só pode ser usada em espaços amostrais equiprováveis. Seja P(A), a probabilidade de ocorrer o evento A. Utilizando o conceito clássico a probabilidade de ocorrer A , P(A) é dada por: P(A) = n (A): Total (s), onde n(A) é o número de resultados favoráveis ao evento A e Total (s) é o número total de resultados em S

2. Abordagem Frequentista

O conceito frequentista se refere ao cálculo de probabilidades por meio de observações sucessivas de um experimento aleatório. A probabilidade é estimada de forma experimental, podendo ser encontrada quando o número de experimentações n tende ao infinito. A probabilidade de ocorrência do evento A pode ser definida como um limite: o experimento é repetido n vezes; observa-se a frequência relativa de ocorrência de um certo resultado e calcula-se o limite.

3. Abordagem Axiomática

Consideramos P(A) como a probabilidade de ocorrência do evento A, associada ao espaço amostral S, P(A).

A P (A) deve satisfazer os seguintes axiomas:

Axioma 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

Axioma 2: $P(S) = 1$

Axioma 3: Se $A \cap B = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Esta abordagem possibilitou grande avanço científico, especialmente do ponto de vista teórico e não existe incompatibilidade entre esse enfoque e os enfoques clássico e frequentista.

Após o estudo dos aspectos históricos e conceituais, continue a leitura do texto para contemplar algumas sugestões práticas sobre o ensino da probabilidade.

Algumas sugestões de atividades

A seguir, serão apresentadas duas atividades selecionadas da literatura e relacionadas à probabilidade que poderão ser desenvolvidas pelo professor com seus alunos em suas aulas de Matemática. Essas atividades são do texto "Probabilidade na Escola", de autoria de Bayer *et al*. (2005).

Atividade 1: O jogo do mago

Um príncipe se revoltou contra o seu mago e suas promessas vãs e resolveu executá-lo. Porém, como um bom príncipe, ele resolveu dar uma última chance ao mago. O mago estava autorizado a repartir 4 bolas (duas brancas e duas pretas) entre 2 urnas. O carrasco escolheria uma destas urnas e tiraria uma bola: se a bola fosse preta, o mago seria executado, senão sua vida estava salva.

Como o mago deveria colocar as bolas nas urnas de forma a ampliar suas chances de sobreviver?

Atividade 2: Titanic

O filme Titanic tem atraído e emocionado multidões em todo o mundo. Outras tragédias mais recentes foram logo esquecidas, mas o caso Titanic continua causando impacto ainda hoje. O que se sabe é que os passageiros sobreviventes, devido ao número insuficiente de botes foram selecionados, por meio de um critério cuja condição financeira era a que mais pesava...

Tabela 1. Passageiros sobreviventes e mortos

Passageiros	Sobreviventes	Mortos	Totais
Crianças	57	52	109
Mulheres	296	106	402
Homens	146	659	805
Totais	499	817	1316

Analise essa tabela e responda:

- Qual foi a probabilidade de um passageiro sobreviver?
- Qual foi a probabilidade de uma criança sobreviver?
- Qual foi a probabilidade de uma mulher sobreviver?
- Qual foi a probabilidade de um homem sobreviver?

Tabela 2- Passageiros e sobreviventes e mortos por Classes

Classe	Sobreviventes	Mortos	Totais
1ª	203	122	325
2ª	118	167	285
3ª	178	528	705
Totais	499	817	1316

A partir da tabela responda:

- Qual foi a probabilidade de um passageiro da 1ª classe sobreviver?
- Qual foi a probabilidade de um passageiro da 2ª classe sobreviver?
- Qual foi a probabilidade de um passageiro da 3ª classe sobreviver?

Referências

VOLUME I e II

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica**: reflexão participativa sobre os currículos do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, 1999.

ALSINA, C.; BURGUÊS, C.; FORTUNY, J. **Invitacion a la didáctica de la geometria**. Madrid: Sínteses, 1987.

ASSIS NETO, F. R. Menos vezes menos dá mais: observações históricas sobre o conceito de número negativo. **Revista de Educação Matemática e Tecnologia Ibero-Americana**, v. 2, n. 1, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/issue/view/ 2273/1835>. Acesso em: 27 maio 2017.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAKOS, M. M. (Org.). O imperador na terra dos faraós. **Nossa História**, São Paulo, v. 2, n. 15, jan. 2005.

BATISTA, F. S. **Um estudo sobre área de triângulos e polígonos convexos e não-convexos**. 2014. 106 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática)–Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: Information Age, 2007. p. 843-908.

BAYER, A.; ECHEVESTE, S.; ROCHA, J.; BITTENCOURT, H.R. Probabilidade na escola. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2005, Canoas. v. I, p.1-12. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/265449108_PROBABILIDADE_NA_ESCOLA> .Acesso em: 3 dez. 2017.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of mathematical concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Natal: SBHMAT, 2002.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal of Research in Mathematics Education**, Las Vegas, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BLANTON, M. **Algebra and the elementary classroom**. Portsmouth: Heinemann, 2008.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. SALVADOR, 10., 2010, Salvador. **Anais**...Salvador, 2010.

BOROVCNIK, M. Research and development in the teaching and learning of probability. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICAL EDUCATION, 11., 2008, Monterrey, Mexico. Disponível em: < https://iase-web.org/documents/papers/icme11/ICME11_TSG13_reportafterconference.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2017.

BOUTINET, Jean-Pierre. **A antropologia do projeto**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEB, 2012.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Diretrizes curriculares nacionais gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base: terceira versão. Brasília: MEC, 2017.

BRITO, A. F; BELLEMAIN, P. M. B. Influência do uso de materiais manipulativos na construção da grandeza comprimento. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Brasília SBEM, 2004. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/01/CC00073428450.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2017.

BROLEZZI, A. C. Discreto e contínuo: explorando uma tensão na história e no ensino de matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2000, Serra Negra. **Anais**... Brasília: SBEM, 2000.

BRUNO, A. C. La ensenãnza de los números negativos: aportacione de una investigación. **Revista de didática de la Matemática**, Universidade de La Laguna, San Cristóbal de La Laguna Santa Cruz de Tenerife, n. 29, p. 5-18, Marzo 1997.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. 8, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARPENTER et al. Algebra in the elementary school: Developing relational thinking. **ZDM** : The International Journal on Mathematics Education, Springer Berlin Heidelberg, v. 37, n. 1, p. 53-59, 2005.

CARRETONI, M. L. Z.; GAZZETTA, M. (Coord.). **Iniciação à Matemática**: 1º e 2º grau. Campinas: UNICAMP, 1986.

CENTURIÓN, M. R. **Porta Aberta**: Matemática. São Paulo: FTD, 2011.

CHAPIN, S. H.; JOHSOM, A. **Math matters**. Sausalito, CA, USA: Math Solutions, 2006.

CHIUMMO, A. **O conceito de áreas de figuras planas**: capacitação para professores do ensino fundamental. 1998. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

CID, E. **La investigación didáctica sobre los números negativos**: estado de la cuestión. Pre-publicaciones del seminario matemático García de Galeano 2003, n. 25, Universidad de Zaragoza. Disponível em: <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25>. Acesso em: 10 ago. 2017.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Young children's ideas about geometric shapes**. 2000. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/258933238_Young_children's_ideas_about_geometric_shapes>. Acesso em: 3 dez. 2017.

CONTI, K. C. **O papel da estatística na inclusão de alunos da Educação de Jovens e Adultos em atividades letradas**. Dissertação (Mestrado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

CORBALÁN, F. **Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato**. Madrid: Síntesis, 1996.

COUTINHO, C. **Introdução ao conceito de probabilidade pela visão frequentista**: estudo epistemológico e didático. 1994. 151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

CURCIO, F.R. **Developing graphics comprehension**: elementary and middle school activities. Reston, VA: NCTM, 1987.

CURI, E. Contextualização, resolução de problemas e educação Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. VIII ENEM. São Paulo: SBEM, 2004.

______. O currículo prescrito e avaliado pelo SAEB no que se refere ao tema relações espaciais: algumas reflexões. In: CURI, E. ; VECE, J. P. (Org.). **Relações espaciais**: práticas educativas de professores que ensinam Matemática. São Paulo: Terracota, 2013. p.21-45.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **O uso da calculadora**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), junho 2003.

______. **Educação Matemática**: da teoria à prática. São Paulo: Papirus, 2017.

DANTE, L. R. **Alfabetização Matemática**. São Paulo: Ática, 2011. (Ápis)

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères**, IREM, Paris VII, n. 6, p. 132-158, janv. 1992.

______, PERRIN-GLORIAN, M.J. Un procéssus d'apprentissage du concept d'aire de superface plane. **Educational studies in Matematics**, v. 20, n. 4, p. 387-424,1989.

FACCO, S. R. **Conceito de área uma proposta de ensino-aprendizagem**. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Matemática**: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

FAZENDA, I. C. A. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro**: efetividade ou ideologia. São Paulo: Loyola, 1979.

______. Interdisciplinaridade e transdisciplinaridade na formação de professores. **Revista do Centro de Educação e Letras UNOESTE**, Centro de Foz do Iguaçu, v. 10, n.1, p. 93- 103, 1º semestre 2008. Disponível em: <http://e-revista.unioeste.br/index.php/ideacao/article/view/4146/3191>. Acesso em: 7 nov. 2017.

FERNANDES, J. A.; MORAIS, P. C. Leitura e Interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 13, n. 1, 2011.

FOSNOT, C. E DOLK, M. **Young mathematicians at work**: constructing multiplication and division. Portsmouth, N. H. Heineman, 2001.

FRÍAS, A.; GIL, F.; MORENO, M. F. Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitude, tiempo. In: CASTRO, E. **Didáctica de la matemática em la Educación Primaria**. Madrid: Síntesis, 2008.

GALVEZ, G. A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: ARTMED, 1996.

GARDING, L. **Encontro com a matemática**. Tradução de Célia W. Alvarenga e Maria Manuela V. Marques Alvarenga. Brasília: Editora da UnB, 1997.

GLAESER, G. Epistemologia dos números relativos. Tradução Lauro Tinoco. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 17, p. 29-124, 1985.

GRANDO, R. C. Jogos computacionais e a educação Matemática: contribuições das pesquisas e das práticas pedagógicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador, 2010.

______. Recursos didáticos no ensino de Matemática: jogos e materiais manipulativos. In: ENCONTRO CAPIXABA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2015, Vitória. **Anais**... Vitória, 2015.

HALL, R. **An analysis of errors made in the solution of simple linear equations**. 2002. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/44ed/4f503982219318fdd57982f324a781411272.pdf>. Acesso em: 8 ago. 2017.

HALL, Richard DG. An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. **Philosophy of mathematics education journal**, n. 15, p.70-79, 2002.

HAYDT, R. C. C. **Curso de didática geral**. São Paulo: Ática, 2002.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**: 5ª série. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Ed.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum,1999. p. 133-155.

______. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J. ; CARRAHER, D. ; BLANTON, M. (Ed.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum, 2008. p.5-17

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, v. 16, n. 1, p. 5-26, 2007.

______. Overall commentary on early algebraization: perspectives for research and teaching. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Ed.). **Early algebraization**. Berlin: Springer, 2011. p. 579-593.

______. The learning and teaching of school algebra. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, NY: MacMillan, 1992. p. 390-419.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.). **Number and measurement**: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC / SMEAC, 1976. p. 101-144.

LERNER, D. É possível ler na escola?. In: BRASIL. Ministério da Educação. **Programa de Formação de Professores Alfabetizadores**: módulo 2. Brasília: MEC, 2001.

LERNER, D., SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 73-155.

LOPES, C. E. O ensino de estatística e da probabilidade na educação básica e a formação de professores. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 27, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008.

LUQUET, G. H. **Les dessins d'um enfant**. Paris: Félix Alcan, 1927.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 7. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

MANDARINO, M. C. F. Que conteúdos da matemática escolar professores dos anos iniciais do ensino fundamental priorizam?. In: GUIMARÃES, G.; BORBA, R. (Org.). **Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização**. Recife: SBEM, 2009. (Coleção SBEM, v. 6)

MARIANO, S.F.S. **Aprendizagens de crianças de terceiro ano do ensino fundamental no que se refere à construção do espaço, suas relações e representações**. 2015. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)–Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015.

MARTINS, P. B.; NASCIMENTO, J. C. P. **O trabalho com o tratamento da informação no 2º ano do Ensino Fundamental**: uma experiência em sala de aula com a construção de tabelas e gráficos. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5715_3555_ID.pdf >. Acesso em: 20 maio 2017.

MATEMÁTICA ESSENCIAL: Ensino Fundamental: Geometria: polígonos e triângulos. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/fundam/geometria/poligonos.htm>. Acesso em: 10 set. 2017.

MELO, M. A. P. **Um estudo de conhecimentos de alunos de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro**. 2003. 125f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências)-UFRPE, Recife, 2003.

MENEZES, L. **Processos Matemáticos na sala de aula**: resolução de problemas e comunicação. Programa de formação continuada para professores do 1º e 2º ciclos. 2007. Disponível em: <https://www.google.com.br/earch?q=processos+matem%C3%A1ticos+na+sala+de+aula+%2B+menezes&oq=processos+matem%C3%A1ticos+na+sala+de+aula+%2B+menezes&gs_l=psy-ab.3...13819.20027.0.20426.13.13.0.0.0.0.322.2331.2-6j2.8.0....0...1.1.64.psy-ab..5.7.2067...35i39k1j33i22i29i30k1j33i160k1.0.eSiDrcp3vts.> Acesso em: 3 dez. 2017.

MOLINA, M. Integración del Pensamiento Algebraico en la Educación Básica. Un Experimento de Enseñanza con Alumnos de 8-9 Anõs. In: MARTINHO, M. H.; FERREIRA, R. A.; VALE, I.;, PONTE, J. P. (Ed.). **Ensino e aprendizagem da Álgebra**. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (p. 27-51). Lisboa: EIEM, 2011.

MORAIS, M. D.; TELES, R.A.M. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. In: UNESCO. **Educação para os objetivos de desenvolvimento sustentável**: objetivos de aprendizagem. Brasília: UNESCO, 2017. 62 p. Disponível em: <http://cdnbi.tvescola.org.br/resources/VMSResources/contents/document/publicationsSeries/16532008_14_MedidaseGrandezasnociclodaalfabetizacao.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2017.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n.1, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2014.

MOURA, A. R. L. **A medida e a criança pré-escolar**. 1995. 210 f. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino de Matemática)-UNICAMP, Campinas, 1995.

MUNIZ, C. A.; BATISTA, C. O.; SILVA, E. B. **Matemática e cultura**: decimais, medidas e sistema monetário: módulo IV. Brasília: Universidade de Brasília, 2008. 109 p.

NASSER, L. Níveis de van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria?. **Boletim GEPEM**, n. 29, p. 31-35, 1991.

NERY, A. Modalidades organizativas do trabalho pedagógico: uma possibilidade. In: BRASIL. Ministério da Educação. **Ensino Fundamental de nove anos**: orientações para a inclusão das crianças de seis anos de idade. Brasília: MEC, 2007.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. **Normas profissionais para o ensino de Matemática** (trad. APM). Lisboa: Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991/1994.

OCHI, F. H.; PAULO R. M.; UOKOYA, J. H.; IKEGAMI, J. K. **O uso de quadriculados no Ensino da Geometria**. São Paulo: IME/USP, 1997.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 53-92.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, Campinas, Unicamp, São Paulo, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul./dez. 1996.

PANIZZA, M. **Ensinar Matemática na Educação Infantil e séries iniciais**: análise e propostas. Porto Alegre, RS: Artmed, 2006. p. 143- 166.

PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

PARZYSZ, B. Representation of space and student's conceptions at high school level. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 22, n. 6, p. 575-593, 1991.

PARZYSZ, B. Knowing vs seeing: problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l' enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, n.17, p. 128-151, 2006.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, Unicamp, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

______. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PEDRO, L. F.; MOREIRA, A. Os hipertextos de flexibilidade cognitiva e a planificação de conteúdos didácticos: um estudo com (futuros) professores de Línguas. **Revista de Enseñanza y Tecnología**, p.29-35, sept.- dic., 2000,

PEREIRA, F. F.; CURI, E. Resolução de problemas do campo aditivo: um olhar qualitativo nos dados quantitativos. **Anais do Encontro de Produção Discente em Ensino de Ciências e Matemática PUCSP / Cruzeiro do Sul**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 1-9, 2012.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1° a 4° série. **Zetetiké**, Campinas, v.7, jan./jun. 2009.

PIAGET, J; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre, RS: Artmed, 1993.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. Florianópolis: EAD / UFSC / CED / CFM, 2010. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2017.

PIRES, C. M. C. **Transformando a prática das aulas de matemática**: textos preliminares. São Paulo: PROEM, 2001.

______. Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil. **Revista Bolema**, Rio Claro, São Paulo, ano 21, n. 29, p. 13-42, 2008. Disponível em: <http://www.redalyc.org/html/2912/291221870003/> Acesso em: 7 nov. 2017.

______.:CURI, E.; CAMPOS, T. M. **Espaço e forma**: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries do ensino fundamental. 2. ed. São Paulo: PROEM, 2001.

______. **Educação Matemática**: conversa com os professores dos anos iniciais. São Paulo: Zapt, 2012.

______. **Números naturais e operações**. São Paulo: Melhoramentos, 2013.

PONCE, H. **Enseñary aprender matemática**: propuestas para el segundo ciclo. Buenos Aires: Centro de Publicaciones educativas y Material Didáctico, 2004.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, v. 19, n. 25, p.105-132, 2006.

______. ; SERRAZINA, L. **Didáctica da Matemática do 1° Ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

______.; BRANCO, N.; MATOS, A. O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, n. 100, p. 89-96, nov./dez. 2008.

ROBERT, Aline. Outils d’analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l’université. **Recherches en Didatique des Mathématiques**, v. 18, n. 2, p. 139-190, 1998.

ROSSI, R. U. M. **Reflexões sobre o ensino dos números inteiros**: uma análise de livros didáticos de matemática do ensino fundamental. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2009.

SAIZ, I. E. A direita...de quem? Localização espacial na Educação Infantil e séries iniciais. In: PANIZA, M. et al. **Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais**: análise e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SALVADOR, C. M. A; NACARATO, A. M. Sentidos atribuídos ao zero por alunos da 6ª série. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 26, 2003, Poços de Caldas. **Anais**... Poços de Caldas: ANPED, 2003. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_26/sentidos.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2017.

SANTOS, C. A. B. **Formação de professores de matemática: contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro**. 2008. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2008a.

______.; CURI, E. O estudo das noções de área e perímetro considerando os níveis de conhecimento esperado dos educandos como ferramenta didática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Brasília: SBEM, 2010.

SANTOS, M. R. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo**: um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas. 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências)–Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco, 2005. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/bitstream/tede2/5929/2/Marilene%20Rosa%20dos%20 Santos.pdf >. Acesso em: 12 fev. 2008.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e tecnologias. São Paulo: SE, 2008.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Currículo da cidade**: Ensino Fundamental: Matemática. São Paulo: SME/COPED, 2017.

______.Secretaria Municipal de Educação. **Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem para o ensino fundamental**: ciclo I: Matemática. São Paulo: SME/DOT, 2007.

______. Secretaria Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica. **Cadernos de Apoio e Aprendizagem**: Matemática: livro do professor. São Paulo: SME/DOT, 2010.

SCHÖN, D. A. **La formación de profesionales reflexivos**: hacia un nuevo disefio de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona: Paidós, 1992.

______. **Educando o profissional reflexivo**: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

SEQUERRA, M. L.; MARINCEK, V. (Org.). **Aprender matemática resolvendo problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SERINO, A. P. **Uma abordagem inclusiva para transformações geométricas**: o caso de alunos cegos. 2011. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-UNIBAN, São Paulo, 2011.

SIEBRA, M. J. **Dificuldades e erros de alunos de 8ª série com relação a questões que envolvem álgebra**. 2009. 99 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2009.

SILVA JUNIOR, F. M. **Pensamento algébrico**: indícios de um currículo enculturador. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SILVA, E. B. Comprimento, superfície e volume na medida certa. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Brasília: SBEM, 2007

SILVA, M. A; PIRES, C. M. C. **Organização da Matemática no Ensino Médio**: a recursão como critério. Ciências e Educação, Bauru, v. 19, n. 2, p. 249-266, 2013.

SMOLE, K. S.; ISHIHARA, C. A.; CHICA, C. R. **Usar ou não a calculadora na aula de matemática?** Disponível em: <http://www.mathema.com.br/mathema/resp/calculadora.html>. Acesso em: 7 abr. 2009.

SPIRO, R.; COULSON, R.; FELTOVICH, P.; ANDERSON, D. Cognitive flexibility theory: advanced knowledge acquisition in ill-structured domains. In: PATEL, V. (Ed.). **Tenth annual conference of the cognitive science society**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1998.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalizing problems. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 2, p. 147-164, 1989.

STREEFLAND, L. **Fractions in realistic mathematics education**: a paradigm of developmental research. Dordrecht: Springer, 1991.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2010.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória dos números inteiros: obstáculos e dificuldades. **Pró-Posições**, Faculdade de Educação da Unicamp, Campinas, v. 4, n. 1, mar. 1993.

TREFFERS, A.; BUYS, K. Grade 2 and 3: calculation up to 100. In: Panhuizen, M. H. **Children learn mathematics**. Netherlands: Frendenthal Institute, 2001. p. 61-88.

TV ESCOLA. Salto para o futuro. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. **Boletim 8**, Brasília: MEC, ano 24, set. 2014.

UNESCO. **Educação para os objetivos de desenvolvimento sustentável**: objetivos de aprendizagem. Brasília: UNESCO, 2017. 62 p.

URSINI, S.; ESCARENO, F.; MONTES, D.; TRIGUEIROS, M. **Ensenanza del álgebra elemental**: una propuesta alternativa. Mexico: Trillas, 2005.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

UTIMURA, G. Z.; CURI. E. **Figuras geométricas espaciais**: alunos de 5° ano e suas professoras aprendendo juntos. São Paulo: Appris, 2016.

VALE, I. Das tarefas com padrões visuais à generalização. In: FERNANDES, J. ; MARTINHO, H. ; VISEU, F. (Org.). **Actas do XX Seminário de Investigação Matemática**. Viana do Castelo: APM, 2009. p. 35-63.

VAN HIELE, P. M. Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. In: TALL, D. O.; THOMAS, M.; SKEMP, Richard R. **Intelligence, learning and understanding in mathematics**: a tribute to Richard Skemp. Flaxton: Post Pressed, 2002.

VECE, J. P. Alunos do 1° ano do ensino fundamental e os problemas de transformação negativa. In: CURI, E.; NASCIMENTO, J. C. P. **Educação Matemática**: grupos colaborativos, mitos e práticas. São Paulo: Terracota, 2012.

______. **Grandezas e medidas**. Texto produzido para a formação de professores dos anos iniciais. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2017.

______.; SILVA, S. D.; CURI, E. Desatando os nós do Sistema de Numeração Decimal: investigações sobre o processo de aprendizagem dos alunos do 5° ano do Ensino Fundamental a partir de questões do SAEB / Prova Brasil. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 1, p. 223-240, 2013.

______.; CURI, E. Representação gráfica do espaço de alunos do 1° ano ao 5° ano do Ensino Fundamental: por que, o que e como analisar?. **Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)**, v. 9, n. 21, 2016. Disponível em: <http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/arte/view/2201/2271>. Acesso em: 3 dez. 2017.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Ed.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

______. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad. Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 2009.

______. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. (Dir.). **Didácticas das MATEMÁTICAS**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ZARAN, M. L. O. **Uma análise dos procedimentos de resolução de alunos de 5º ano do ensino fundamental em relação à problemas de estruturas multiplicativas**. 2013. 172 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2013.

______.; SANTOS, C. A. B. Uma análise sobre aprendizagens e dificuldades reveladas por alunos do 5º ano na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. In: CURI, E.; NASCIMENTO, J. C. (Org.). **Educação Matemática**: grupos colaborativos, mitos e práticas. São Paulo: Terracota, 2012.

ZUNINO, Delia Lerner. **A Matemática na escola**: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

Consulte as obras disponíveis na Biblioteca Pedagógica
da Secretaria Municipal de Educação.

portal.sme.prefeitura.sp.gov.br/biblioteca-pedagogica
e-mail: smecopedbiblioteca@sme.prefeitura.sp.gov.br
Telefone: 55 11 3396-0500

CURRÍCULO
da CIDADE

PREFEITURA DE
SÃO PAULO
EDUCAÇÃO