SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO

Cadernos de apoio e aprendizagem

MATEMÁTICA

9º ano

EDIÇÃO REVISADA E ATUALIZADA

PREFEITURA DE SÃO PAULO
EDUCAÇÃO

2014

PREFEITURA DE
SÃO PAULO

Prefeitura da Cidade de São Paulo

Prefeito
Fernando Haddad

Secretaria Municipal de Educação

Secretário
Cesar Callegari

Secretária Adjunta
Joane Vilela Pinto

Chefe de Gabinete
Ataíde Alves

Assessoria Técnica de Planejamento

Chefe
Antonio Rodrigues da Silva

Diretoria de Orientação Técnica

Diretor
Fernando José de Almeida

Divisão de Orientação Técnica Ensino Fundamental e Médio

Diretora
Fátima Aparecida Antonio

Equipe de DOT - Ensino Fundamental e Médio
Conceição Letícia Pizzo Santos, Cristhiane de Souza, Hugo Luiz de Menezes Montenegro, Humberto Luís de Jesus, Ione Aparecida Cardoso Oliveira, Kátia Cristina Lima Santana, Jeanny Moreira Szram, Leila de Cássia José Mendes da Silva, Maria Emília Lima, Nilza Isaac de Macedo

Assessoras Especiais
Alfredina Nery, Maria Helena Soares de Souza

Equipe de Revisão

Equipe DOT - Ensino Fundamental e Médio
Cristhiane de Souza, Humberto Luis de Jesus, Ione Aparecida Cardoso Oliveira, Kátia Cristina Lima Santana, Leila de Cássia José Mendes da Silva

Equipe Núcleo de Avaliação Educacional
André Marchesini Gabrielli, Daniel Fabri Bagatini, Fernando Gonsales, Marcela Cristina Evaristo, Márcia Martins Castaldo

Equipe de Editorial

Coordenadora do Centro de Multimeios
Magaly Ivanov

Equipe de Artes Gráficas / Centro de Multimeios
Ana Rita da Costa, Katia Marinho Hembik, Magda Perez Avilez

CTP, impressão e acabamento:
Imprensa Oficial do Estado de São Paulo

Carta aos educadores e às famílias

Os **Cadernos de Apoio e Aprendizagem** são produções construídas por muitas mãos, fruto de propostas, reflexões, práticas e revisões de percurso, revelando o amplo amadurecimento e evolução curricular da Rede Municipal de Ensino de São Paulo.

Esta reedição dos **Cadernos de Apoio e Aprendizagem** é mais um passo que a Secretaria Municipal de Educação dá em direção à construção coletiva e aperfeiçoada de um material que é parte de nosso processo histórico e valoriza as práticas de nossos educadores e de nossas escolas.

No entanto, sua perspectiva pedagógica e política se amplia. Estes **Cadernos** apoiam o trabalho do aluno e situam-se no contexto programático da **Reorganização Curricular "Mais Educação São Paulo"**. A aprendizagem é tratada, aqui, como direito do aluno e é dever da escola e de toda a sociedade proporcionar condições para sua eficácia.

No **Programa de Reorganização Curricular "Mais Educação São Paulo"**, a interdisciplinaridade, o trabalho metodológico com projetos e a ênfase na autoria de alunos e professores compõem nossa política pedagógica. Assim os Cadernos de Língua Portuguesa e Matemática constituem-se como componentes específicos e fundamentais para que o trabalho integrado se desenvolva.

Os princípios estabelecidos pelos Direitos de Aprendizagem estão pautados no conceito de aprendizagem como direito humano e de educação como direito social. Garanti-los compreende proporcionar a todas as crianças e jovens, nos três ciclos – Alfabetização, Interdisciplinar e Autoral -, condições igualitárias para conduzir e manifestar escolhas e exercerem sua cidadania, em qualquer situação social. Os direitos de aprendizagem ganham uma dimensão política, que vai além da pedagógica, na medida em que definem a aprendizagem como direito humano .

Na sua dimensão pedagógica, os direitos de aprendizagem para Matemática são:

I. Utilizar caminhos próprios, na construção do conhecimento matemático, como ciência e cultura construídas pelo homem, ao longo dos tempos, em resposta a necessidades concretas e a desafios próprios dessa construção.

II. Reconhecer regularidades em diversas situações, de diversas naturezas, compará-las e estabelecer relações entre elas e as regularidades já conhecidas.

III. Perceber a importância da utilização de uma linguagem simbólica universal na representação e modelagem de situações matemáticas como forma de comunicação.

IV. Desenvolver o espírito investigativo crítico e criativo, no contexto de situações-problema, produzindo registros próprios e buscando diferentes estratégias de resolução.

V. Fazer uso do cálculo mental, exato, aproximado e por estimativas. Utilizar as tecnologias da Informação e Comunicação, potencializando sua aplicação em diferentes situações.

Para garantir esses direitos, os professores precisam planejar situações didáticas que favoreçam a aprendizagem, considerando, para isso, os objetivos do ensino da Matemática, a necessidade de progressão, a continuidade, a reflexão, a sistematização, as situações de interação, das quais os estudantes participam e das quais têm direito de participar, os conhecimentos que já construíram, e os que têm o direito de construir e de se apropriar. Dessa forma, os **Cadernos de Apoio e Aprendizagem** propostos para os nove anos do Ensino Fundamental podem ser não somente uma ferramenta para o professor e para o estudante, mas parte do currículo, favorecendo a articulação entre os conhecimentos que os alunos trazem das suas relações sociais e das suas experiências do cotidiano com o conhecimento a ser construído, aprendido, ampliado, refletido e sistematizado na escola, garantindo assim, a aprendizagem matemática à qual esse aluno tem direito.

Os **Cadernos de Apoio e Aprendizagem** de Matemática são disciplinares em sua essência, mas favorecem a interdisciplinaridade, na medida em que ampliam o acervo das habilidades construídas em resolução de situações-problema e em conteúdos específicos. A distribuição das sequências didáticas está de acordo com os eixos estruturantes estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Matemática e cada unidade, das oito escolhidas para cada ano contempla os quatro eixos, que dialogam entre si.

Os eixos estruturantes de conhecimento, estabelecidos para a Matemática, são: Números e Operações (que inclui conceitos algébricos);

Grandezas e Medidas; Espaço e Forma (que inclui as transformações e simetrias) e o Tratamento da Informação. Sendo assim, a organização do trabalho pedagógico em Matemática visa: as práticas sociais, como disparadoras de situações-problema; o desenvolvimento de ações de produção do aluno – registro, leitura e avaliação; os processos da construção, em suas várias etapas, do Sistema de Numeração Decimal, incluindo operações, algoritmos e campos numéricos; a organização, percepção, representação e interação com outros campos do saber; a localização e movimentação no espaço físico real ou representado; o estabelecimento de relações entre elementos geométricos; a construção das noções de grandezas e medidas (comprimento, massa, capacidade, temperatura e tempo) e do valor monetário. O planejamento, a coleta e a organização de dados, a leitura, a construção e a interpretação de gráficos, tabelas e medidas de posição do eixo estruturante Tratamento da Informação ampliam o trabalho com a leitura e a escrita de diferentes gêneros textuais, possíveis nos outros eixos.

Os Cadernos de Apoio e Aprendizagem de Matemática e o Ciclo Autoral

O Ciclo Autoral caracteriza-se pela construção de conhecimento, com base em projetos curriculares comprometidos com a intervenção social. Os projetos curriculares visam à participação com autoria e responsabilidade na vida em sociedade, de modo que o educando, ao intervir no âmbito das experiências do grupo familiar e escolar, possa tornar mais justas as condições sociais vigentes. Nesse sentido, a Educação, concebida como constructo humano, constitui-se como forma de intervenção no mundo.

Os direitos de aprendizagem em Matemática, nessa perspectiva, estão atrelados à compreensão dos fenômenos da realidade, e essa compreensão oferece conhecimentos necessários para que os estudantes possam agir conscientemente sobre a sociedade na qual se inserem. Esse aspecto está diretamente relacionado a outras áreas do conhecimento, contribuindo para a compreensão e ação no mundo contemporâneo e para o desenvolvimento do indivíduo, em uma perspectiva de formação para a cidadania.

As situações propostas nos **Cadernos de Apoio e Aprendizagem de Matemática** para os 7º, 8º e 9º anos não divergem dos princípios do Ciclo Autoral, pois foram organizados com base em expectativas de aprendizagem e possibilitam a compreensão da realidade social e cultural dos educandos e a intervenção nesta realidade.

CAPA (Fotos da esquerda para a direita)
1ª linha:
Campeonato Municipal de Xadrez - 2013 - Foto: Adriana Caminitti
EMEF Dr. Antonio Carlos Abreu Sodré - 2010 - Foto: Lilian Borges
EMEF Irineu Marinho - 2009 - Foto: Lilian Borges
EMEF Profª Maria Berenice dos Santos - 2010 - Foto: Neila Gomes
EMEF COHAB Vila Nova Cachoerinha - 2013 - Foto: Neila Gomes
EMEF Prof. Henrique Pegado - 2011 - Foto: Neila Gomes

2ª linha:
CEU EMEF Três Pontes - 2013 - Foto: Ana Karla Chaves Muner
EMEF Dr. Antonio Carlos Abreu Sodré - 2010 - Foto: Lilian Borges
CEU EMEF Cândida Dora Pino Petrini - 2012 - Foto: Vivian Lins
CECI Tenondé Porã - 2010 - Foto: Lilian Borges
CEU EMEF Hermes Ferreira de Souza - 2012 - Foto: Vivian Lins
EMEF Profª Maria Berenice dos Santos - 2010 - Foto: Neila Gomes

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

São Paulo (SP). Secretaria Municipal de Educação.
Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática – 9º ano / Secretaria Municipal de Educação. - 2. ed. rev. e atual. - São Paulo : SME, 2014.
264p. : il.

Produção coletiva.
O livro do professor está disponível no portal da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo.
A 1ª edição desta obra, Cadernos de Apoio e Aprendizagem – Matemática e Língua Portuguesa, foi organizada pela Fundação Padre Anchieta e produzida com a supervisão e orientação pedagógica da Divisão de Orientação Técnica da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo.

ISBN 978-85-8379-010-5 (livro do aluno)

1.Ensino Fundamental 2.Matemática I.Título

CDD 371.302812

Código da Memória Técnica: SME10/2014

ÍNDICE

Unidade 1

Nesta Unidade, a partir de algumas informações sobre a Mata Atlântica, você resolverá situações-problema que envolvem números racionais nas formas fracionária, decimal e percentual. Além disso, verificará experimentalmente o teorema de Pitágoras e ampliará seus conhecimentos na resolução de problemas de contagem.

Certamente você sabe que as questões ligadas ao ambiente são hoje uma preocupação mundial, mas talvez ainda não tenha parado para pensar em que medida o conhecimento matemático ajuda a compreender a questão ambiental.

Você sabia que a Mata Atlântica é um importante conjunto de ecossistemas e um dos mais ameaçados de extinção? Na época do descobrimento do Brasil, ela ocupava 1.315.460 km^2. Em 2009, foi reduzida a 7,91% do que era.

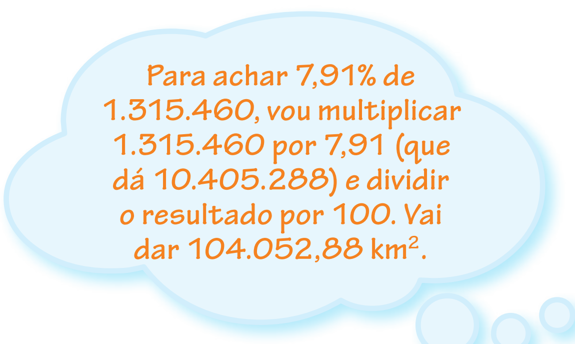
Faça uma estimativa da atual área da Mata Atlântica.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Porcentagem e calculadora

1. Lendo o texto sobre a Mata Atlântica, Paulo pensou:

Já Andréa pensou assim:



a) A estimativa de Paulo é adequada?

____

b) O cálculo de Andréa está correto? Por quê?

____

c) Há outras maneiras de calcular porcentagem? Quais?

____

2. Em uma calculadora, digite a seguinte sequência de teclas, para conferir o último resultado:

1 3 1 5 4 6 0 x 0 • 0 7 9 1 =

a) O número que apareceu no visor corresponde a 7,91% da área calculada anteriormente?

____

b) Se a calculadora tiver a tecla %, use-a e registre uma sequência de teclas para calcular 7,91% de 1.315.460 km².

c) O que você aprendeu sobre o uso da calculadora, na atividade 2?

____

____

3. Na Mata Atlântica, há um grande número de espécies ameaçadas de extinção. Por exemplo, cerca de 14% das 250 espécies de mamíferos. Quantas espécies de mamíferos estão ameaçadas de extinção?

____

____

Números racionais e suas representações

1. A representação percentual é uma das formas de escrever um número racional. Por exemplo, 25% é o mesmo que 0,25 (representação decimal) e que $\frac{1}{4}$ (representação fracionária).

a) Justifique essa afirmação.

b) Complete o quadro com diferentes representações de um mesmo número racional:

NÚMERO RACIONAL		
forma fracionária	**forma decimal**	**forma percentual**

2. Como você pensou para transformar:

a) na forma decimal, um número racional escrito na forma fracionária:

b) na forma fracionária, um número racional escrito na forma percentual:

c) na forma decimal, um número racional escrito na forma percentual:

A fauna da Mata Atlântica: quanto por cento?

A fauna da Mata Atlântica é surpreendente, pois muitas de suas espécies são endêmicas, ou seja, só existem nela. Por exemplo, das 250 espécies de mamíferos, 55 são endêmicas. Qual é a porcentagem de mamíferos endêmicos?

PALE ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

1. Escreva na forma decimal e na forma percentual a razão entre o número de espécies de mamíferos endêmicos e o total de espécies de mamíferos da Mata Atlântica.

A razão representada na forma percentual é chamada índice ou taxa percentual.

2. Sabe-se que há, na Mata Atlântica, 350 espécies de peixes, das quais 133 são endêmicas. Determine o índice percentual de espécies endêmicas de peixe e mostre como você fez os cálculos.

Aprendendo mais sobre a Mata Atlântica

1. Nos domínios da Mata Atlântica, vivem cerca de 70% da população brasileira, e estão as maiores cidades e polos industriais do país. Além disso, ela abriga aproximadamente 7% de todas as espécies do planeta. Escreva uma forma fracionária e uma decimal correspondentes a:

a) 70%	**b)** 7%

2. Observe os dados da tabela, sobre outras espécies da Mata Atlântica, e responda:

espécie	total de espécies	espécies endêmicas
anfíbios	304	90
aves	1.023	188
répteis	197	60

a) Determine os índices percentuais de espécies endêmicas de cada tipo. Mostre como você fez seus cálculos.

b) Qual é a espécie que tem a maior porcentagem de endêmicos?

Representações decimais

1. Com uma calculadora, encontre a forma decimal dos números racionais abaixo e use reticências para indicar algarismos ou grupos de algarismos que se repetem indefinidamente:

$\frac{7}{20} =$ ______ $\frac{49}{90} =$ ______

$\frac{8}{9} =$ ______ $\frac{15}{8} =$ ______

$\frac{13}{33} =$ ______ $\frac{26}{25} =$ ______

O que você observou nessas representações decimais?

______

______

2. Compare sua resposta da atividade 1 com o texto a seguir e complemente o que você escreveu.

As representações decimais dos números racionais também são chamadas dízimas.

Se a dízima de um número racional é finita, então ele é um decimal exato.

Exemplos da atividade 1: ______

Se a dízima de um número racional é infinita e apresenta repetição infinita de algarismos em sua parte decimal, então ele é uma dízima periódica.

Exemplos da atividade 1: ______

Dízimas periódicas

Com seu colega de dupla, responda às questões abaixo e depois compartilhe suas respostas com a turma.

1. Escreva na forma decimal as seguintes representações fracionárias:

a) $\frac{1}{9} =$

c) $\frac{4}{9} =$

b) $\frac{3}{9} =$

d) $\frac{5}{9} =$

2. O que você observa nessas dízimas em relação ao numerador da forma fracionária correspondente?

3. Com base na atividade 1, determine as dízimas abaixo sem fazer a divisão:

a) $\frac{2}{9} =$

c) $\frac{7}{9} =$

b) $\frac{6}{9} =$

d) $\frac{8}{9} =$

4. O número que se repete indefinidamente, depois da vírgula decimal, é o *período* da dízima. Destaque o período das dízimas das atividades 1 e 3.

5. Toda forma fracionária com denominador 9 gera uma dízima periódica?

Frações geratrizes

1. Qual é o período de uma dízima periódica no caso em que a fração tem denominador 9 e numerador entre 0 e 9?

2. Como você pode determinar a dízima periódica correspondente à fração cujo denominador é 9 e o numerador é maior que 9?

3. Em função das conclusões anteriores sobre dízimas periódicas, quais correspondem a cada um dos números abaixo? (Depois, confira suas respostas na calculadora.)

a) $\frac{10}{99} =$

b) $\frac{12}{99} =$

c) $\frac{13}{99} =$

d) $\frac{14}{99} =$

Cada representação fracionária é uma das frações geratrizes da dízima periódica correspondente.

4. Escreva como obter, a partir da representação decimal, uma fração geratriz de:

a) 0,232323...=

b) 0,717171... =

Verificando procedimentos

Paulo não estava muito convencido de que $\frac{13}{99}$ correspondia a 0,131313...

Seu professor orientou-o a fazer a verificação usando equações:

(1ª) $x = 0{,}131313...$

(2ª) $100\,x = 13{,}1313...$

(3ª) $100\,x - x = 13$

Observe esse procedimento e responda:

a) O que representa a letra x? ______________________________

b) Por que os dois termos da igualdade foram multiplicados por 100?

____

c) Por que $100\,x - x = 13$? ______________________________

____

d) Resolva a equação $100\,x - x = 13$ e escreva sua conclusão.

____

____

e) Procure explicar esse procedimento para se obter uma fração geratriz de dízimas periódicas desse tipo.

____

____

____

Descobrindo relações numéricas

Observe os quadros seguintes:

	A	B	C
1ª linha	5	4	3
2ª linha	25	16	9

	A	B	C
1ª linha	13	12	5
2ª linha	169	144	25

1. Descubra uma relação numérica entre cada número da 2ª linha e seu correspondente na 1ª linha.

____

____

2. Complete os quadros abaixo segundo a mesma relação numérica que você descobriu na atividade 1.

	a	b	c
1ª linha	26	24	10
2ª linha			

	a	b	c
1ª linha	39	36	15
2ª linha			

3. Observe os três números da 2ª linha. Compare o maior deles com a soma dos outros dois números da 2ª linha de cada quadro.

O que você concluiu?

____

____

4. Em relação aos três números da 1ª linha, podemos dizer que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois?

____

____

Uma verificação experimental

Nas figuras abaixo, desenharam-se quadrados sobre os lados de dois triângulos retângulos.

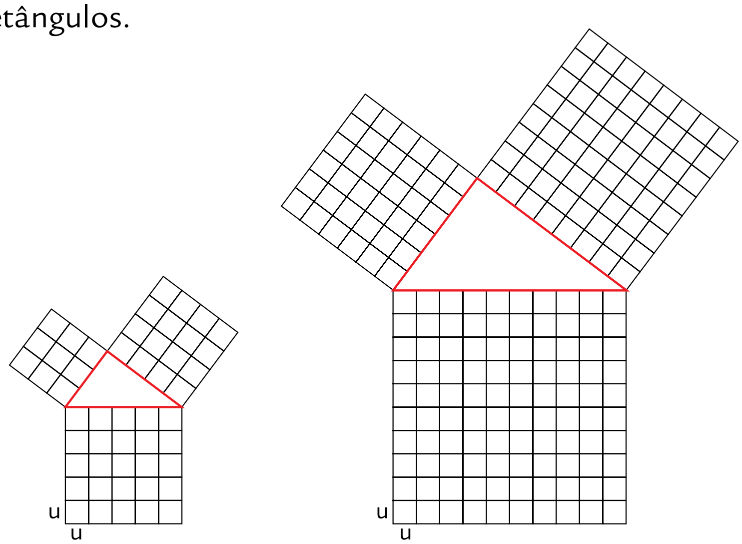


figura 1 figura 2

1. Qual é a área do quadrado maior de cada figura?

---

2. Qual é a área de cada um dos dois quadrados menores de cada figura?

---

3. Que relação numérica existe entre a área do quadrado maior e a soma das áreas dos outros dois quadrados?

---

4. Quais são as semelhanças entre o problema dos quadros e este dos quadrados? Converse com seu colega de dupla, registrem suas ideias e depois voltem à atividade anterior para validar ou mudar suas conclusões.

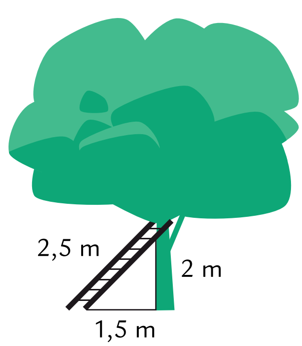
Árvores da Mata Atlântica

Nos jardins públicos das diversas cidades próximas à Mata Atlântica, é possível ver várias espécies de árvores nativas.

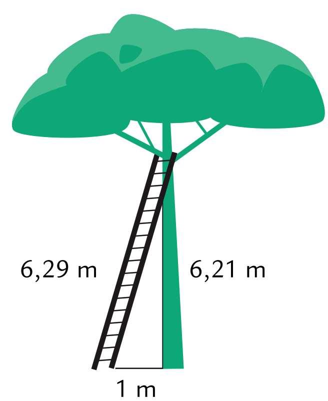
Entre elas, destacamos o jabolão, o jequitibá e o pinheiro-do-paraná.

Para podar essas árvores, os funcionários usam escadas articuladas que podem atingir várias alturas.

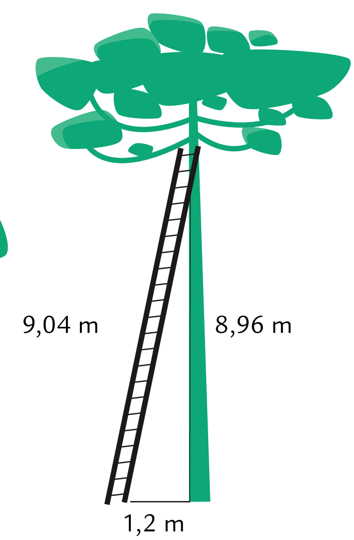
Observe em cada figura as medidas do comprimento da escada, da altura que ela atinge na árvore e da distância do pé da escada ao pé da árvore. Há uma relação numérica entre essas três medidas.



Jabolão



Jequitibá



Pinheiro-do-paraná

Junte-se a dois colegas e, com uma calculadora, tentem descobrir que relação é essa e anotem-na.

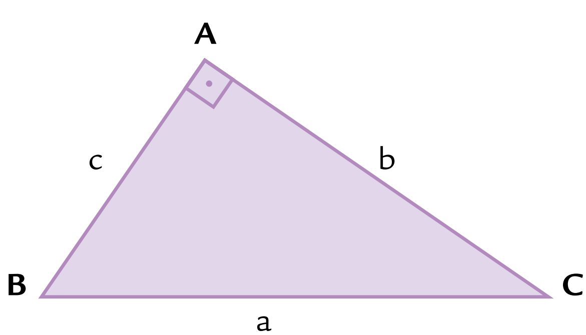
Conjecturas e generalizações

1. No problema das árvores, se nomearmos **a** o comprimento da escada, **b** a altura que ela atinge na árvore e **c** a distância do pé da escada ao pé da árvore, qual é a sua conclusão sobre a, b e c?

2. No problema dos quadros, escreva uma relação entre a, b e c.

3. No problema dos quadrados, a área do quadrado apoiado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados apoiados sobre os catetos?

Considerando **a** a medida da hipotenusa de cada um dos triângulos retângulos e **b** e **c**, as medidas dos catetos, escreva uma relação entre a, b e c.



A relação que se repetiu nessas três situações é conhecida, em matemática, como teorema de Pitágoras.

A primeira situação envolvia números, a segunda, áreas de quadrados apoiados em lados de triângulos retângulos e a terceira, comprimentos de segmentos.

Triângulos e calculadora

1. Complete o quadro seguinte com medidas adequadas a triângulos retângulos.

Os dois primeiros valores são as medidas dos catetos e o terceiro, a da hipotenusa, em centímetros.

a)

20	21	

b)

6,4		13,6

2. a) Use uma calculadora que tenha as teclas M+ e MR. Procure saber o que indicam essas teclas.

M+ ______________________________

MR ______________________________

Quando pressionamos a tecla MC, a calculadora limpa a memória. Pressione-a sempre antes de começar novas contas.

b) Observe a sequência de teclas para determinar a medida da hipotenusa.

As letras **p** e **q** representam as medidas dos catetos.

Atribua a **p** e a **q** medidas de catetos e teste essa sequência na sua calculadora, para ver se ela realmente funciona.

MC p × p = M+

q × q = M+

MR √

Use a mesma sequência para determinar a medida da hipotenusa dos triângulos retângulos cujos catetos medem:

a) 7 e 24 __________ **b)** 8 e 15 __________ **c)** 27 e 36 __________

Contagens

O nome vulgar de algumas árvores da Mata Atlântica como o ipê, o jacarandá e o manacá está associado aos tipos branco, rosa e roxo. Por exemplo, o ipê--branco e o manacá rosa das fotos.

WIKIPEDIA.ORG

Manacá rosa

MM

Ipê-branco

1. Se há três tipos de árvore com três cores possíveis, que tipos diferentes pode haver para:

a) ipê? ______________________________

b) jacarandá? ______________________________

c) manacá? ______________________________

2. Registre aqui como você resolveu o problema.

____

____

____

3. Organize uma tabela de dupla entrada com esses tipos de árvores.

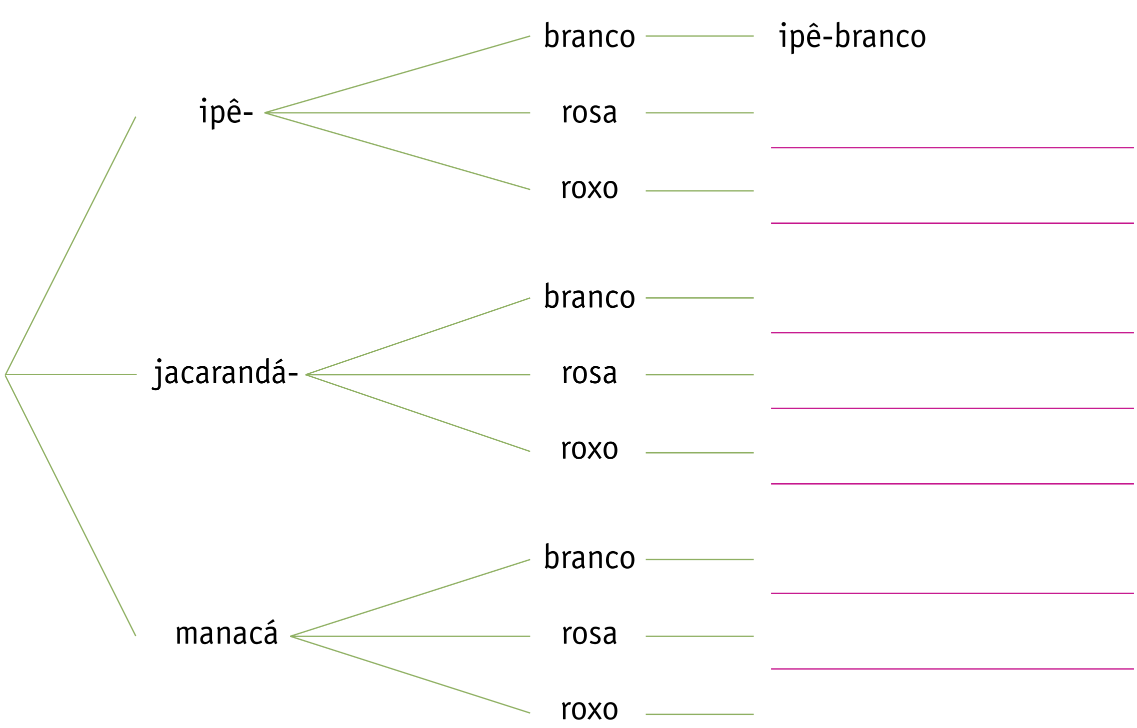
tipo \ árvore	ipê-	jacarandá-	manacá
branco			
rosa			
roxo			

4. Como poderíamos contar todos os tipos de árvore sem descrevê-las uma por uma?

____

____

5. Complete o diagrama de árvore para obter todas as possibilidades:



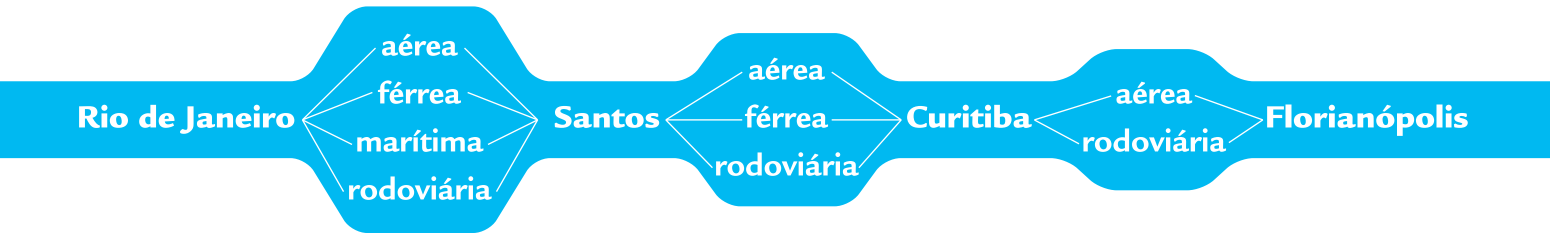
Viagens pela Serra do Mar

A Serra do Mar é uma formação montanhosa que acompanha a costa do Atlântico desde o norte de Santa Catarina até o Rio de Janeiro.

Próximas a essa serra, encontram-se, entre outras, as cidades do Rio de Janeiro, de Santos, Curitiba e Florianópolis.

1. Há quatro maneiras de ir do Rio de Janeiro a Santos, três maneiras de ir de Santos a Curitiba e duas maneiras de ir de Curitiba a Florianópolis.

Veja a representação dessas maneiras no diagrama:



Escreva um texto com as informações que você pode tirar desse diagrama.

____

____

2. Suponha que você queria ir do Rio de Janeiro a Curitiba passando por Santos. Descreva todas as maneiras possíveis de fazer essa viagem.

____

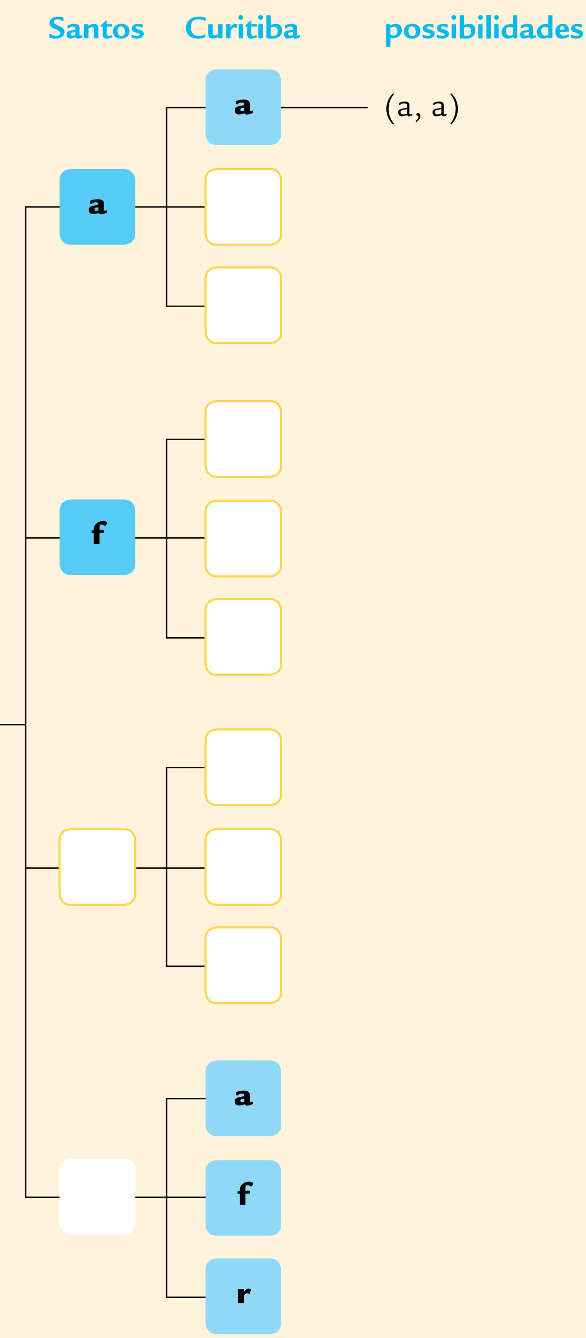
____

3. Agora, conte quantas são essas maneiras.

____

4. Veja como Roberto organizou os dados numa árvore de possibilidades, usando letras para representar cada forma de viajar:

Roberto preencheu alguns quadradinhos. Procure entender o modo como ele organizou os dados e complete os quadradinhos que estão em branco.



Planejamento e contagem

1. Imagine que você foi do Rio de Janeiro a Florianópolis passando por Santos e Curitiba e que, para voltar pelo caminho inverso, não quer usar, em cada etapa, a mesma via que usou na ida.

HELDER RIBEIRO/WIKIPEDIA.ORG

Pão de Açúcar
(Rio de Janeiro – RJ)

AMNEMONA/WIKIPEDIA.ORG

Ponte Hercílio Luz
(Florianópolis – SC)

De quantas maneiras você pode planejar sua viagem de volta?

Registre os procedimentos que você usará para resolver esse problema.

2. Agora, veja esse outro jeito de pensar (que pode ser diferente do seu) e faça uma comparação.

a) De quantas maneiras você pode ir de Florianópolis a Curitiba usando uma via que não foi usada ainda?

---

b) Tendo já escolhido uma das vias de transporte para ir de Florianópolis a Curitiba, quantas possibilidades você tem para ir de Curitiba a Santos?

---

c) Tendo já escolhido uma das vias para ir de Florianópolis a Curitiba e outra para ir de Curitiba a Santos, quantas maneiras restam para ir de Santos ao Rio de Janeiro?

---

3. Como você poderia contar todas as possíveis viagens de volta sem descrevê-las?

WIKIPEDIA.ORG

Anagramas

Você sabe o que é um anagrama?

ANAGRAMA é uma palavra construída com exatamente as mesmas letras de outra palavra, podendo ou não ter significado na nossa língua.

Por exemplo: NIGÁ, GINÁ, GÁNI, NGÁI são alguns anagramas da palavra INGÁ.

Ingá é o nome da fruta do ingazeiro, uma árvore nativa da Mata Atlântica que floresce de agosto a novembro, comumente nas matas ciliares (em beira de rios), e dá frutos comestíveis pelos animais.

Discuta com seu grupo e responda:

1. Quantas letras tem cada anagrama da palavra INGÁ? ____________________

2. A palavra INGÁ é um anagrama da palavra INGÁ? ______________________

3. Faça uma estimativa de quantos são os anagramas da palavra INGÁ.

____

4. Escreva todos os anagramas da palavra INGÁ. Conte-os e compare com a estimativa que você fez.

____

____

5. Explique como você obteve esses anagramas.

____

____

____

Anagramas e contagem


WIKIPEDIA.ORG

Você já viu uma árvore de pau-brasil? Foi ela que deu nome ao nosso país.

É uma árvore nativa da Mata Atlântica que agora está ameaçada de extinção.

Procure mais informações sobre o pau-brasil e compartilhe-as com seus colegas.

Para determinar todos os possíveis anagramas da palavra BRASIL, vamos organizar nossa contagem, para evitar que algum fique esquecido.

1. Escolha uma letra para formar o primeiro anagrama. De quantas maneiras você pode escolher essa primeira letra?

2. Imagine que você escolheu a primeira letra para formar o primeiro anagrama. De quantas maneiras você pode escolher a segunda letra?

3. Escolhidas as duas primeiras letras para o primeiro anagrama, de quantas maneiras você pode escolher a terceira letra?

4. Continuando esse processo até formar o primeiro anagrama, de quantas maneiras você pode escolher a quarta, a quinta e a sexta letra?

5. Há 720 anagramas da palavra BRASIL. Justifique essa afirmação.

Vamos salvar o sagui?


ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

O sagui-da-serra-escuro é um macaco pequenino, sapeca e que parece assoviar. Tem o corpo coberto por pelos pretos e manchas ruivas. Vive na Mata Atlântica, nos estados de São Paulo e Rio de Janeiro, e é uma das espécies ameaçadas de extinção.

Em tupi-guarani, a palavra *sagui* se refere a uma espécie de macaco pequeno e de rabo comprido.

1. No diagrama abaixo, de quantas maneiras você pode formar a palavra SAGUI começando pela letra S, passando para uma das letras A, passando por uma das letras G, por uma das letras U e chegando a uma das letras I? (Você só pode seguir para uma letra que esteja à direita ou abaixo da letra em que está, ou seja, não pode "subir" nem "voltar".)

S A G U I
A G U I
G U I
U I
I

---

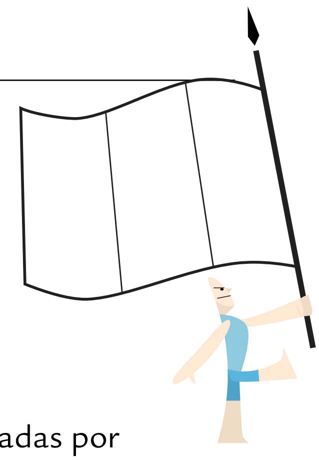
2. Registre aqui a sua maneira de resolver o problema:

Problemas de contagem

1. Um parque tem 5 portões. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair do parque por qualquer um deles?

2. Você tem 5 lápis de cor para pintar cada faixa da bandeira ao lado com uma cor diferente.

De quantos modos você pode fazer isso?



3. Três cidades A, B e C são ligadas por estradas. A e B são ligadas por 3 estradas, B e C são ligadas por 4 estradas e não há estradas ligando A e C diretamente, ou seja, para ir de A a C ou de C a A, deve-se passar por B.

a) Faça um desenho da situação e verifique se ele satisfaz todas as condições do enunciado.

b) De quantos modos se pode viajar de A a C passando por B, sem repetir qualquer estrada?

c) De quantas maneiras se pode ir de A a C e voltar de C a A sem passar duas vezes pela mesma estrada?

Agora, é com você

1. Um professor de matemática pediu aos alunos que classificassem os números racionais do quadro abaixo em decimais exatos e dízimas periódicas.

$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{46}{99}$	$\frac{71}{90}$	$\frac{45}{90}$	$\frac{123}{999}$

Veja como Carla resolveu a questão:

- decimais exatos: $\frac{8}{5}$ e $\frac{11}{16}$
- dízimas periódicas: $\frac{18}{9}, \frac{7}{9}, \frac{46}{99}, \frac{71}{90}, \frac{45}{90}, \frac{123}{999}$

Você acha que Carla resolveu corretamente? Justifique sua resposta.

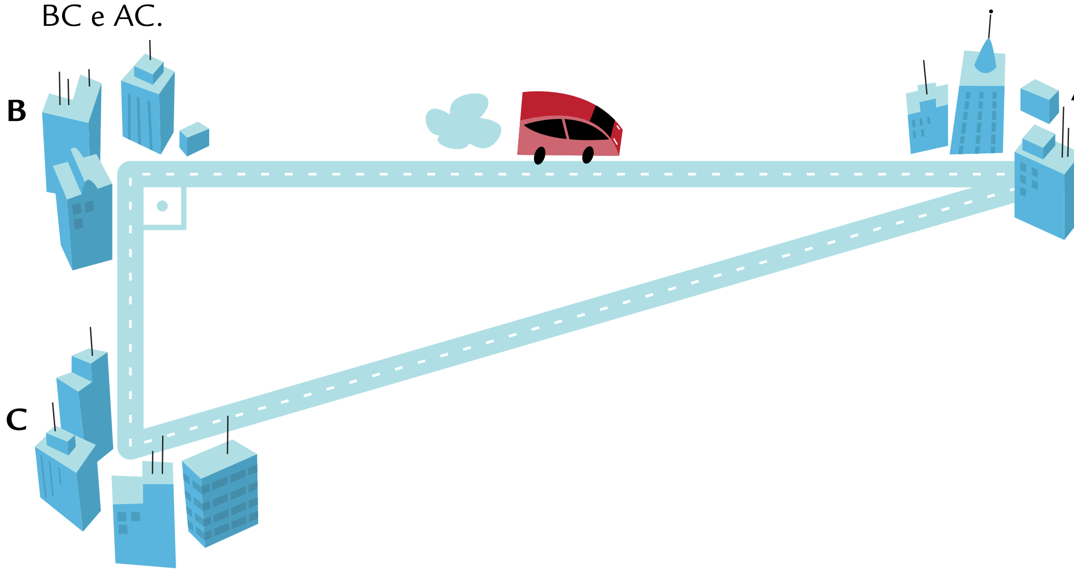
2. Justifique a resposta correta e corrija a que estiver errada.

Uma fração geratriz da dízima periódica:

a) 0,181818... é $\frac{2}{11}$

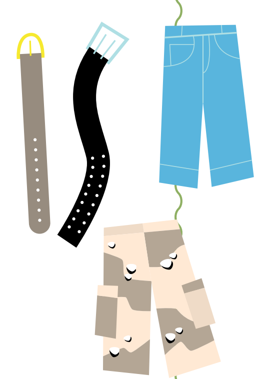
b) 1,0444... é $\frac{13}{9}$

3. A figura a seguir representa as cidades A, B e C ligadas pelas estradas AB, BC e AC.



A estrada AB tem 192 km e a estrada BC tem 56 km. Qual é a medida da estrada AC?

4. Pedro tem 3 camisas, 2 calças e 2 cintos. De quantas maneiras diferentes ele pode vestir uma camisa, uma calça e um cinto?

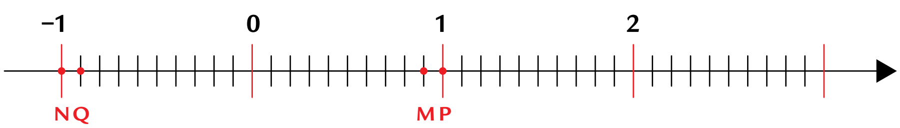


Nas questões de 5 a 9, assinale a alternativa correta.

5. Dentre os racionais abaixo, um número maior do que $\frac{2}{5}$ e menor do que $\frac{7}{9}$ é:

☐ a) 0,3 ☐ b) 0,4 ☐ c) 0,7 ☐ d) 0,8

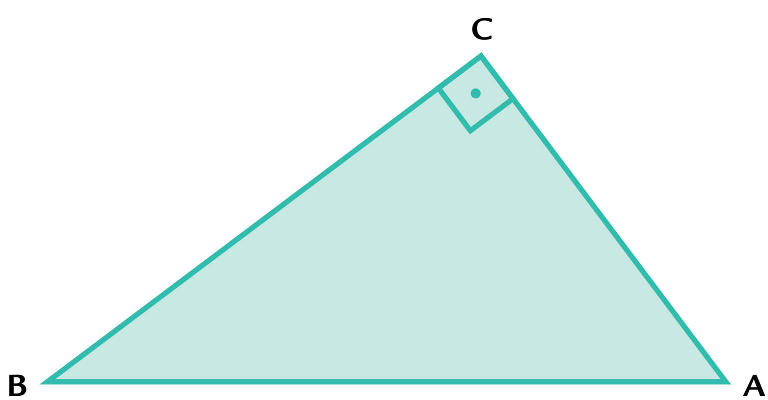
6. Observe a reta numérica:



A dízima periódica 0,999... está representada pelo ponto:

☐ a) M ☐ b) P ☐ c) N ☐ d) Q

7. Antônio desenhou um triângulo retângulo e verificou que a medida de B a C é igual a 72 mm e a de A a C é igual a 54 mm. A medida de A a B é:



☐ a) 90 mm ☐ b) 85 mm ☐ c) 80 mm ☐ d) 75 mm

8. O número de anagramas da palavra CEDRO é:

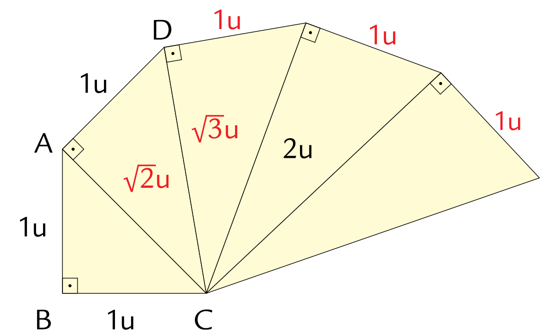
☐ a) 10 ☐ b) 15 ☐ c) 100 ☐ d) 120

9. De quantas maneiras diferentes 5 pessoas podem formar uma fila indiana?

☐ a) 190 ☐ b) 200 ☐ c) 120 ☐ d) 180

UNIDADE 2

Nesta Unidade, continuaremos a estudar o teorema de Pitágoras e a aplicar o princípio multiplicativo da contagem. Também resolveremos situações-problema que envolvem medidas de figuras geométricas e conheceremos números que não são racionais.



Durante muito tempo, as ideias de número que se disseminaram entre os povos antigos eram as de números inteiros (hoje conhecidos como naturais) e as de números racionais.

J BREW/WIKIPEDIA.ORG

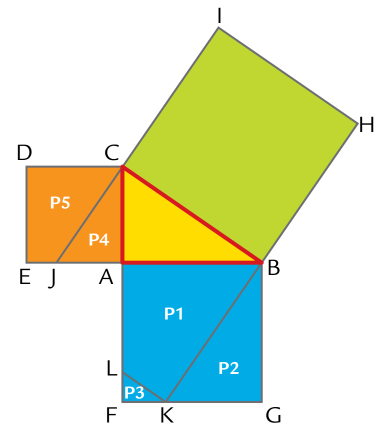
Além de sua grande contribuição para a geometria, os gregos também descobriram que esses dois tipos de número não eram suficientes para determinar com precisão certas medidas – por exemplo, a diagonal de um quadrado cujo lado mede 1 unidade. A aplicação do teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo isósceles de lado unitário deu origem, mais tarde, aos números irracionais.

WIKIPEDIA.ORG

Você se lembra de alguma contribuição dos gregos para a Matemática?

Um quebra-cabeça

1. a) Reproduza esta figura numa folha de papel, desenhando um triângulo retângulo qualquer e três quadrados apoiados em seus lados.



b) No quadrado azul, prolongue o lado HB até o lado FG, obtendo o ponto K. Depois, trace o segmento KL, paralelo ao lado BC do quadrado verde.

c) No quadrado laranja, prolongue o lado IC até o lado EA, obtendo o ponto J.

d) Recorte os quadrados azul e laranja nos segmentos de reta BK, KL e CJ.

e) Chame as peças encontradas de P1, P2, P3, P4 e P5.

f) Verifique que é possível cobrir o quadrado verde com essas cinco peças.

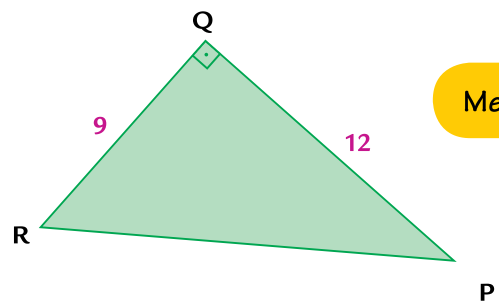
2. Chamando de **a** a medida da hipotenusa BC, de **b** a medida do cateto AC e de **c** a medida do cateto AB, relacione suas conclusões com o teorema de Pitágoras, estudado na Unidade 1.

Com esse quebra-cabeça, você verificou a validade do teorema de Pitágoras, que é geralmente enunciado assim:

> Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

De Pitágoras à raiz quadrada

1. Veja como Ana e Paula usaram o teorema de Pitágoras para determinar a medida da hipotenusa RP no triângulo retângulo PQR.



Medidas em centímetros

Elas começaram escrevendo:

$$(\text{medida RP})^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Nesse ponto, ficaram em dúvida e começaram o seguinte diálogo:

Complete:

Ana: "Qual é o número que elevado ao quadrado é igual a 225?"

Paula: "É só extrair a raiz quadrada de 225!"

Ana: "Mas 225 é um número quadrado perfeito? Por quê?"

Paula: "Ah! Já sei. 15 é a raiz quadrada exata de 225 porque $15^2 = 225$."

Ana: "Então, a medida da hipotenusa é 15 centímetros."

2. Complete as sentenças substituindo cada $\boxed{}$ por um número que as torne verdadeiras:

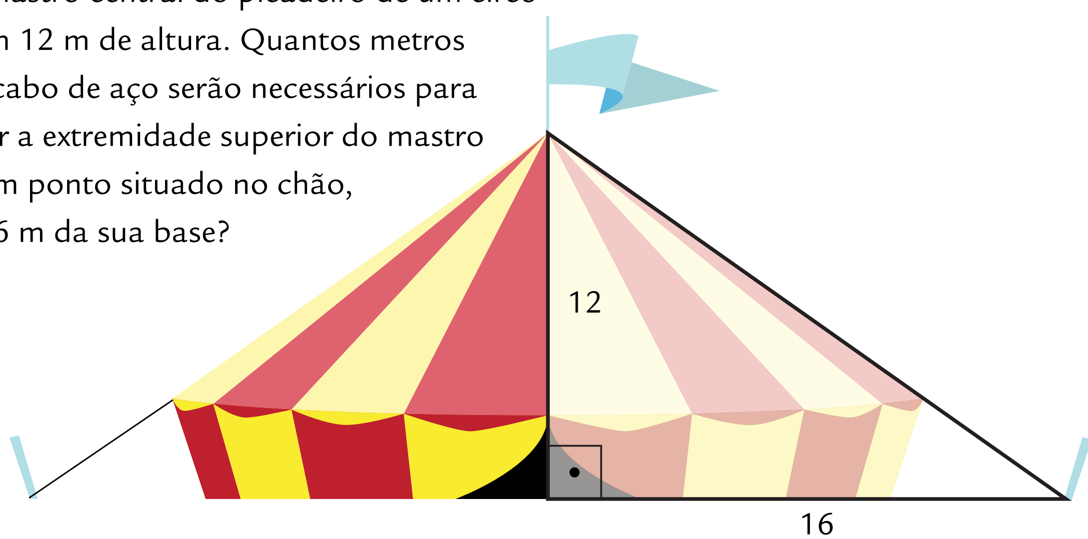
a) $\sqrt{6.724} = 82$ porque $\boxed{}^{2} = 6.724$

b) $\sqrt{4.900} = \sqrt{\boxed{}^{2}} = \boxed{}$

De modo geral:

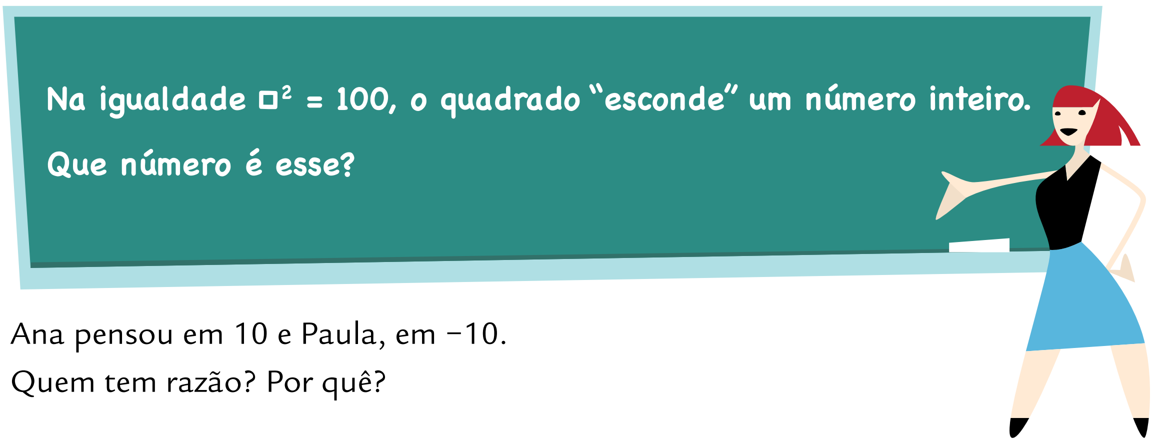
Se **a** é um número positivo, então $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$

3. O mastro central do picadeiro de um circo tem 12 m de altura. Quantos metros de cabo de aço serão necessários para ligar a extremidade superior do mastro a um ponto situado no chão, a 16 m da sua base?



Um número escondido

1. Leia com atenção a questão proposta na lousa.



Ana pensou em 10 e Paula, em −10.
Quem tem razão? Por quê?

Os números 10 e –10, elevados ao quadrado resultam 100, mas $\sqrt{100} = 10$.

2. Qual é o número cuja raiz quadrada é 1,5?

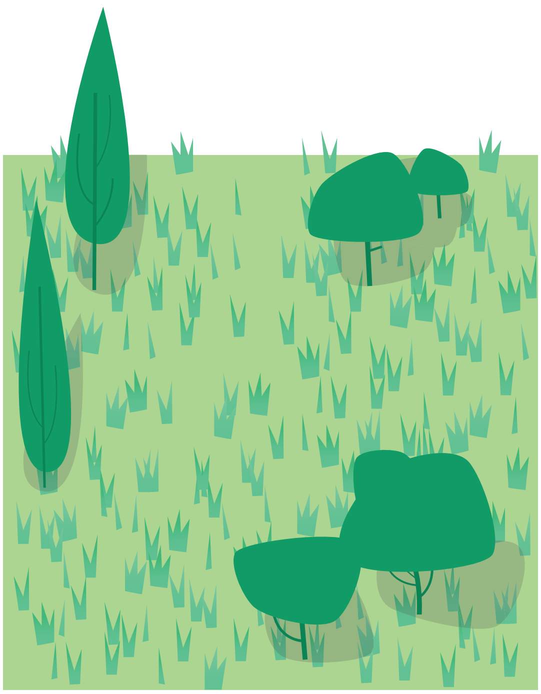
3. Quais são os números que elevados ao quadrado são iguais a $\frac{36}{121}$?
Justifique sua resposta.

De modo geral:

Se **a** é um número positivo ou nulo e $x^2 = a$, então $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.
Os números $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$ são *opostos*.

Raiz quadrada aproximada

1. A área de um jardim quadrado é 72 m^2. Qual é a medida do lado desse jardim?



Escreva como você resolveu o problema.

2. A raiz quadrada de 72 é um número não inteiro que está entre 8 e 9. Como obter a raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito, sem calculadora?

3. Para encontrar um valor aproximado da raiz quadrada de 72, com uma casa decimal, por falta e por excesso, sem usar uma calculadora, complete a tabela seguinte:

número	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
quadrado	65,61	67,24							

4. Observando a tabela, dê um valor aproximado da raiz quadrada de 72:

a) por falta:

b) por excesso:

5. Se você usar uma calculadora que tem uma tecla √, digite:

7 2 √ =

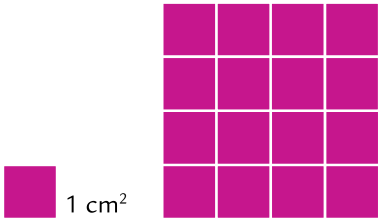
Qual é o resultado que aparece no visor da calculadora?

6. Qual é a medida aproximada do lado desse jardim?

7. Qual é o perímetro aproximado desse jardim? Mostre como você calculou.

Aplicando o teorema de Pitágoras

1. Observe as figuras:



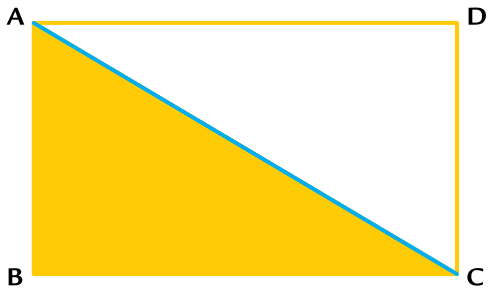
a) Quantos quadradinhos com 1 cm² cobrem esse quadrado? ____________

b) Qual é a área desse quadrado? ____________________________________

c) Qual é a medida de cada lado desse quadrado? ______________________

d) Representando pela letra ℓ a medida do lado de um quadrado e pela letra **A**, a sua área, escreva uma relação entre a medida de cada lado do quadrado e sua área usando o símbolo $\sqrt{}$ de raiz quadrada.

2. Os lados do retângulo ABCD medem 12 cm e 20 cm.



Calcule a medida da diagonal AC, por falta, até a casa dos décimos.

Um número estranho

Membros da Escola Pitagórica celebrando o nascer do sol. (Fyodor Bronnikov. 1827—1902)

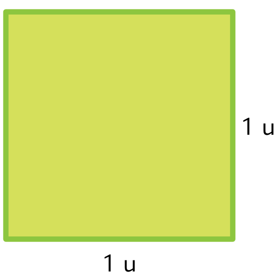
Na época de Pitágoras, pensava-se que a harmonia do universo podia ser expressa por relações entre números inteiros.

Hipaso de Metaponto, um membro da escola pitagórica, descobriu um número (desconhecido na época) para expressar a razão entre a medida da diagonal de um quadrado cujos lados medem 1 unidade de comprimento, e a medida desses lados.

Vamos conhecer o número que Hipaso descobriu.

1. Os lados desse quadrado medem 1 unidade.

Decomponha a superfície quadrangular traçando uma de suas diagonais.



a) Que figuras apareceram nessa decomposição?

____

b) Aplicando o teorema de Pitágoras, calcule a medida dessa diagonal.

____

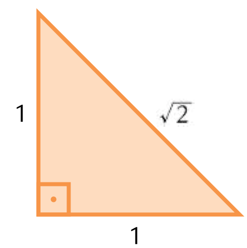
c) Calcule um valor aproximado para essa medida.

____

$\sqrt{2}$: Um número irracional

O teorema de Pitágoras foi o início da constatação da existência de um novo tipo de número, que foi denominado *número irracional*.

Veja uma representação geométrica do número $\sqrt{2}$.



Na calculadora, encontre um valor aproximado da raiz quadrada de 2, pressionando as teclas **2** , **√** e **=** .

a) Que número apareceu no visor? ______________________________

b) Para comprovar que o valor obtido para $\sqrt{2}$ é aproximado, faça o seguinte:

> Com 1,4142135 (ou 1,4142136) no visor da calculadora, pressione as teclas **×** e **=**. (O objetivo é calcular $1{,}4142135^2$ ou $1{,}4142136^2$.)
>
> Que número apareceu no visor? ______________________

A difícil conclusão a que muitos bons matemáticos chegaram ao longo da história da humanidade (há mais de 2.000 anos) é que, por melhor que seja a aproximação de $\sqrt{2}$, nunca obteremos:

$$(\text{aproximação de } \sqrt{2})^2 = 2$$

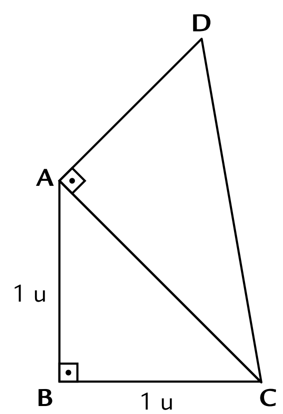
Por causa disso, dizemos que o número representado pelo símbolo $\sqrt{2}$ não é um número racional, ou seja, não pode ser escrito como um quociente entre dois números inteiros com divisor não nulo. Assim, ele foi denominado *número irracional*.

Se em uma calculadora aparecer 2 como resultado de (aproximação de $\sqrt{2}$)^2, isso significa que seu processador interno fez um arredondamento.

Triângulos em espiral

Podemos formar espirais desenhando uma sequência de triângulos retângulos em torno de um ponto.

1. Construa uma espiral desse tipo começando com um triângulo retângulo ABC cujos catetos medem 1 u. Depois, construa outro triângulo retângulo DAC, em que AC seja um cateto e o cateto AD meça 1 u. Observe que AC é hipotenusa do triângulo ABC e CD é hipotenusa do triângulo ACD.



Continue construindo triângulos retângulos em que um dos catetos meça 1 u e o outro seja a hipotenusa do triângulo anterior.

2. Determine as medidas das hipotenusas obtidas.

Números reais

Observe as medidas das hipotenusas obtidas na atividade da página anterior.

1. Use uma calculadora para determinar um valor aproximado da $\sqrt{3}$ por falta e outro por excesso.

a) Como você pode ter certeza de que esses valores de $\sqrt{3}$ são aproximados?

b) $\sqrt{3}$ é um número racional ou irracional? Justifique sua resposta.

2. $\sqrt{4}$ é um número racional ou irracional? Justifique sua resposta.

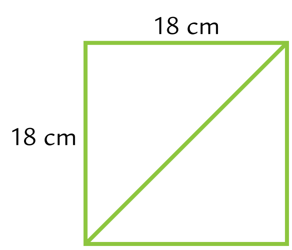
3. Desenhe um triângulo retângulo com catetos que medem 3 cm e 2 cm. A medida da hipotenusa é um número irracional? Qual é esse número?

Reunindo os números *racionais* com os números *irracionais*, temos o *conjunto dos números reais*.

Algumas medidas

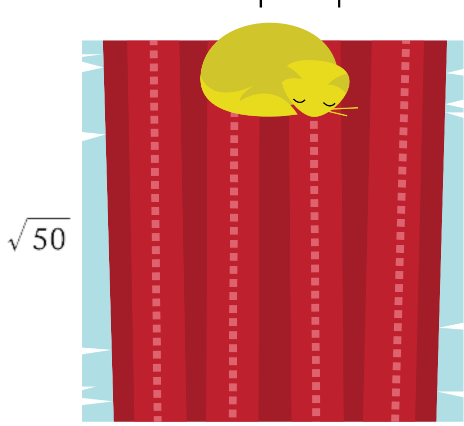
1. O tampo de uma mesa quadrada tem área de 7.225 cm². A medida do lado ℓ dessa mesa é um número irracional? Justifique sua conclusão usando uma calculadora.

2. Qual é a medida exata da diagonal do quadrado abaixo?



Escreva para essa medida um valor aproximado, com 6 casas decimais.

3. O lado de um tapete quadrado mede $\sqrt{50}$ m.



a) Qual é a área desse tapete?

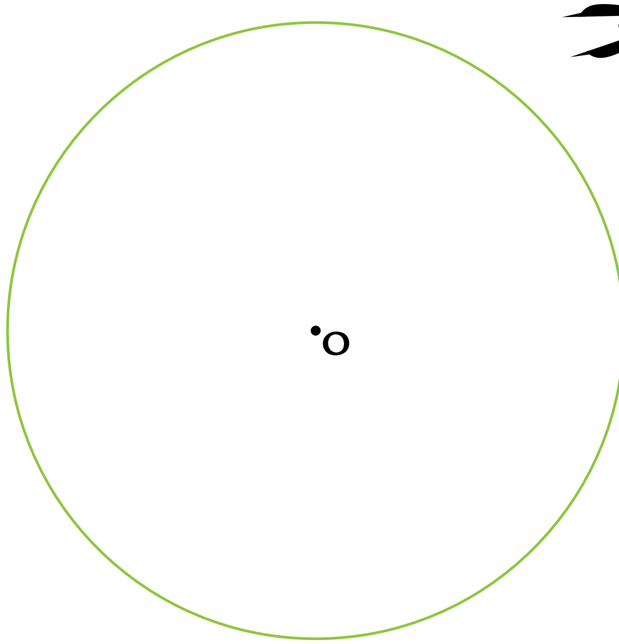
b) Essa área é um número racional ou irracional? ____________________

Elementos da circunferência

“A figura perfeita!” Foi assim que Aristóteles, um filósofo da Grécia antiga, se referiu à circunferência.

Observe a circunferência abaixo, de centro O.

a) Marque sobre ela três pontos: A, B e C.



Trace os segmentos de reta que unem o centro a esses pontos e compare as medidas desses segmentos. O que você percebe?

____

b) Como se chamam esses segmentos? __________________________

c) Corda é um segmento de reta com extremidades em dois pontos da circunferência. Destaque algumas cordas na sua circunferência.

d) Diâmetro é uma corda que contém o centro da circunferência. Desenhe um diâmetro na sua circunferência.

2. Cada componente do grupo deve trazer para a próxima aula um pedaço de barbante e uma lata cilíndrica, um CD, um pires ou um copo.

Um experimento

1. Com o pedaço de barbante que você trouxe, meça o comprimento da circunferência dos objetos.

2. Com uma régua, meça o diâmetro dessas circunferências.

3. Com a calculadora, divida o comprimento de cada circunferência pela correspondente medida do diâmetro. Registre esses valores na tabela:

objeto	comprimento da circunferência	medida do diâmetro	$\frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}}$
1			
2			
3			
4			

4. Observe os diversos quocientes obtidos com a divisão do comprimento de cada circunferência pela correspondente medida do diâmetro. O que você percebe?

O número exato que se obtém ao dividir o comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro é representado pela letra grega π (pi) e tem o seguinte valor racional aproximado:

$$\pi \cong 3{,}14159265358979323846264338327 95$$

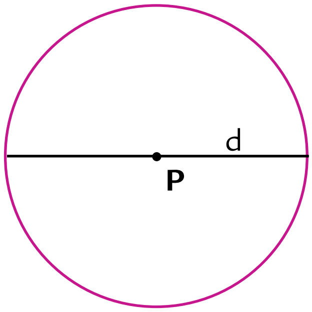
5. Compare esse valor com os quocientes da sua tabela.

Comprimento de uma circunferência

Nas atividades da página anterior, você percebeu que o número π pode ser obtido dividindo o comprimento de uma circunferência pela medida do seu diâmetro. Ou seja, o número π é a razão entre o comprimento (ou perímetro) de uma circunferência e a medida de seu diâmetro.

$$\pi = \frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}}$$

1. Com essa razão, calculamos o comprimento (ou perímetro) de uma circunferência.



Representando o comprimento da circunferência pela letra **C** e a medida do diâmetro pela letra **d**, escreva uma fórmula para o comprimento em função da medida do diâmetro.

2. Observe a circunferência de centro **P** desenhada acima.

a) Qual é a relação entre as medidas do diâmetro e do raio de uma circunferência?

b) Escreva uma fórmula para o comprimento em função da medida do raio.

3. Determine, em função de π, o comprimento de uma circunferência que tem 3,5 cm de raio.

Fuxicos e rendas


PULSAR IMAGENS

Dona Marta é uma artesã que faz tapetes, colchas, almofadas e toalhas em fuxico.

Fuxicos são círculos cortados em tecido e alinhavados como se vê na figura.

1. Lembra? Círculo é a figura formada pelos pontos da circunferência e pelos pontos internos a ela.

Desenhe um círculo no espaço abaixo.

2. Para atender a uma encomenda, Dona Marta cortou círculos em três tamanhos e fez as seguintes anotações:

círculo A	círculo B	círculo C
comprimento: 18,84 cm	comprimento: 25,12 cm	comprimento: 15,70 cm
raio: 6 cm	diâmetro: 4 cm	raio: 2,5 cm

Alguns cálculos não estão corretos. Quais são? Corrija-os.

Toalhas redondas

1. Dona Marta tem uma peça de renda com 9 metros e quer costurá-la na borda de três toalhas de mesa circulares que medem 1 metro de diâmetro. Ela conseguirá colocar renda nas três toalhas?

Junto com seu colega de dupla, responda às questões abaixo e depois compartilhe suas respostas com a turma.

a) Identifique as informações numéricas que são dadas, escrevendo o que significa cada número.

____

____

Que pergunta você precisa responder? ______________________

____

Qual seria uma resposta razoável? ______________________

____

O que você terá que fazer para resolver o problema? ______________

____

b) Faça um plano para resolver esse problema, explicando seus procedimentos.

____

____

c) Execute esse plano registrando seus cálculos e escrevendo a resposta completa.

2. Use uma calculadora para obter a medida do diâmetro de uma toalha circular cujo comprimento mede aproximadamente 2,7946 m. Mostre como você pensou para fazer isso.

3. Uma praça circular tem 30 m de raio. Uma pessoa deu 10 voltas nessa praça. Quantos metros ela percorreu? Use $\pi \cong 3{,}14$.

Problemas desafiadores

Os problemas seguintes podem ter mais de uma solução, apenas uma solução ou não ter solução.

Nos enunciados, podem faltar dados ou pode haver mais dados do que os necessários.

Analise cada um dos problemas antes de resolvê-lo:

a) lendo atentamente o enunciado;

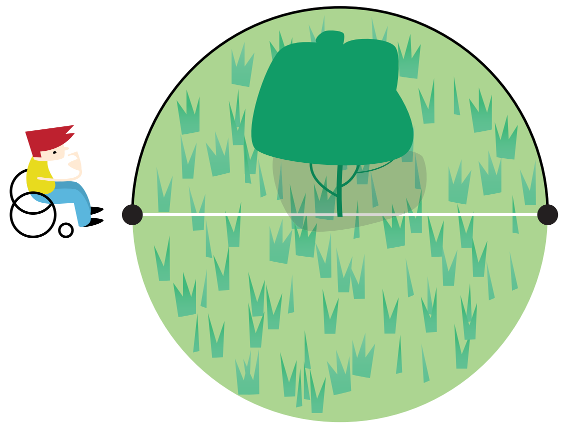
b) procurando o significado das palavras que você não conhece (se for preciso, use um dicionário);

c) identificando as informações dadas e relacionando-as com as perguntas.

1. As faces redondas de algumas moedas de 10 centavos têm 2 cm de diâmetro. As faces redondas de algumas moedas de 25 centavos têm 2,5 cm de diâmetro.

Qual é a razão entre os comprimentos das duas circunferências das moedas?

2. O raio de uma praça circular mede 50 m. Caminhando sobre sua borda, uma pessoa percorreu metade dessa praça em 2 minutos.



Quantos metros, aproximadamente, ela percorreu?

3. Dizer que uma bicicleta tem "aro 26" significa que a roda da bicicleta têm 26 polegadas de diâmetro.

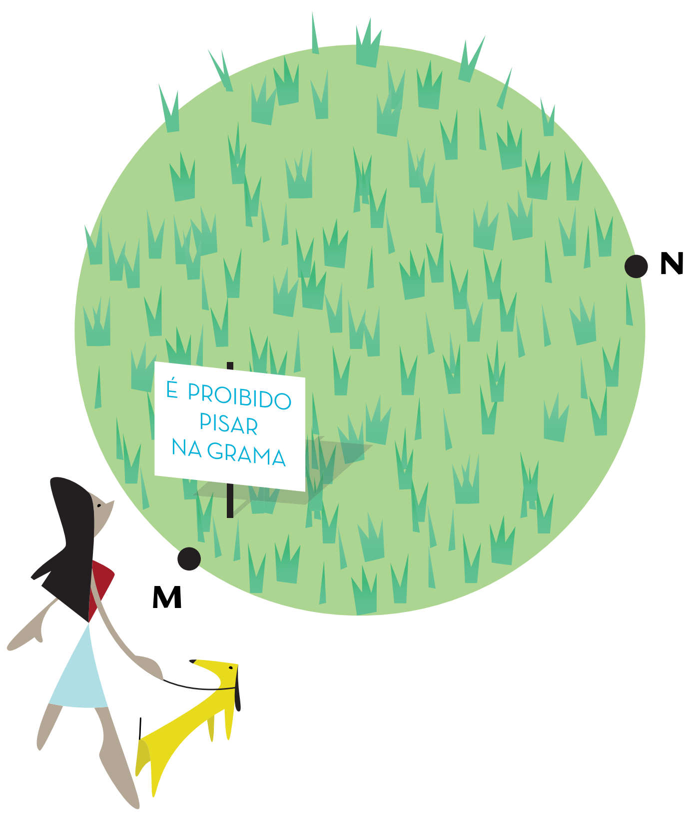
Quantos metros, aproximadamente, percorre uma roda dessas em uma hora?

WIKIPEDIA.ORG

Comprimentos de arcos

No estudo das formas e das linhas, as circunferências e os círculos sempre se destacaram como as mais regulares e perfeitas, e há inúmeras aplicações dessas figuras e de suas partes no nosso dia a dia.

1. Imagine que a periferia de um jardim todo gramado seja uma circunferência. Há no jardim uma placa com os seguintes dizeres: "É proibido pisar na grama."



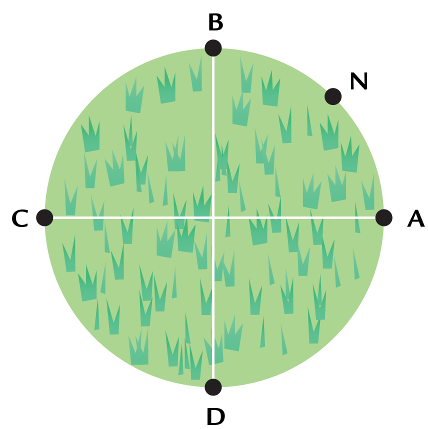
Uma pessoa está no ponto M e quer ir até o ponto N percorrendo a periferia da praça. De quantas maneiras alguém pode caminhar de M a N sobre a circunferência?

Cada um desses caminhos chama-se *arco de circunferência*.

2. Os diâmetros AC e BD traçados na representação desse jardim são perpendiculares e medem 8 m.

Nessas condições, a circunferência ficou dividida em 4 arcos de comprimentos iguais.

a) Use $\pi \cong 3{,}14$ e calcule o comprimento dessa circunferência. Registre seus cálculos.



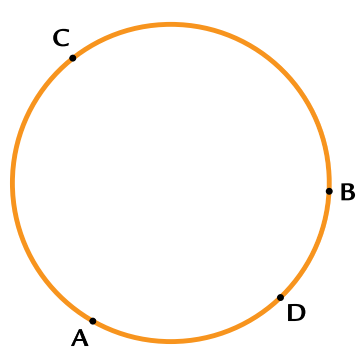
b) Indicando por arco $\overset{\frown}{ANB}$ o percurso de uma pessoa que vai de A a B passando por N, determine o comprimento do:

arco $\overset{\frown}{ANB}$

arco $\overset{\frown}{ABC}$

arco $\overset{\frown}{ACD}$

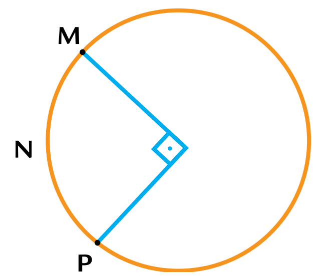
3. Os raios de uma circunferência medem 10,5 cm, e os pontos A e B determinam os arcos $\overset{\frown}{BCA}$ e $\overset{\frown}{ADB}$. O comprimento do arco $\overset{\frown}{BCA}$ é o dobro do comprimento do arco $\overset{\frown}{ADB}$. Quanto mede cada arco? Adote $\pi \cong 3{,}14$.



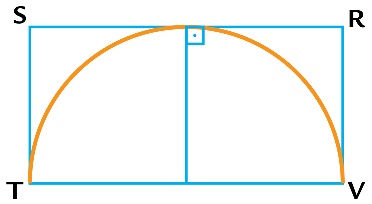
Cálculos de comprimentos de arcos

Para os exercícios a seguir, adote $\pi \cong 3{,}14$.

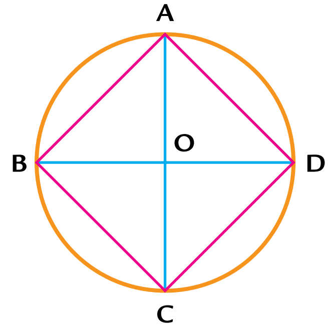
1. O comprimento do arco $\overset{\frown}{MNP}$ é 12,56 cm. Quanto mede o diâmetro da circunferência que contém esse arco?



2. O comprimento da semicircunferência da figura é 18,84 cm. Calcule o perímetro do retângulo RSTV.



3. Na figura, os vértices do quadrado ABCD estão sobre uma circunferência de centro O. Se os lados desse quadrado medem $\sqrt{32}$ cm, qual é a medida do arco $\overset{\frown}{BCA}$?



Código alfanumérico

No mundo moderno, usam-se números para identificar pessoas e objetos: são os códigos alfanuméricos, combinações de letras e números.

Possivelmente, você usa e vê códigos desse tipo em várias situações. Por exemplo, quando digita uma senha para ler seus e-mails e nas placas dos veículos que circulam em São Paulo.

1. Pesquise outras situações em que se empregam códigos alfanuméricos.

____

____

____

2. No atual sistema de emplacamento de veículos no Brasil, as placas são formadas por 3 letras e 4 algarismos.

Veja o exemplo ao lado.

a) Faça uma estimativa de quantas placas desse tipo podem ser formadas.

____

____

____

b) Registre sua maneira de resolver esse problema.

____

____

____

Conhecendo outros procedimentos

Imagine que em uma cidade as placas dos veículos são formadas por 2 letras e 2 algarismos, como no exemplo seguinte:

Quantas placas com as letras ME, nessa ordem, podem ser formadas?

Existem vários jeitos de resolver esse problema. Veja como Carlos organizou a contagem.

1. Começou contando quantas placas podem ser formadas com as letras M e E, nessa ordem.

a) Escolheu um algarismo para colocar em um dos dois quadradinhos em branco e concluiu que tinha 10 opções nessa primeira escolha.

b) Repetiu o que fez no item anterior para o outro quadradinho em branco e verificou que também tinha 10 opções nessa segunda escolha.

c) Para calcular quantas placas do tipo M E – ___ ___ que poderiam ser formadas, fez: $10 \times 10 = 100$ placas

2. Depois, contou quantas placas poderiam ser formadas com os algarismos 1 e 0, nessa ordem.

a) Escolheu uma letra para colocar em um dos quadradinhos em branco. Quantas opções Carlos teve nessa primeira escolha?

___

b) Repetiu o que fez no item anterior para o outro quadradinho em branco. Quantas opções Carlos teve nessa segunda escolha?

____

c) Quantas placas desse tipo ___ ___ – 1 0 podem ser formadas?

____

3. Carlos usou as duas situações anteriores para contar o número total de placas formadas por 2 letras seguidas por 2 algarismos e obteve:

____

4. Agora, use o procedimento de Carlos para resolver o problema da página 67.

5. Formule um problema sobre contagens. Troque-o com um colega para a resolução.

Enunciado:

____

____

____

Princípio multiplicativo da contagem

1. Um professor de matemática de uma escola pública municipal fez um concurso para escolher o número que deveria fazer parte do logotipo do laboratório de matemática.

Os três números ao lado foram os finalistas:

Se não houver empates, de quantas maneiras eles poderão se classificar?

Registre seus cálculos.

2. Confira a sua resposta observando as possibilidades de classificação:

O 1° colocado pode ser qualquer um dos três números.

Tendo sido escolhido o 1° colocado, o 2° colocado pode ser qualquer um dos dois números restantes.

Tendo sido escolhidos o 1° e o 2° colocados, o 3° colocado só pode ser o número restante.

Logo, podemos calcular o número total de classificações assim:

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ maneiras.}$$

Esse jeito de pensar é um importante princípio matemático denominado *princípio multiplicativo*.

Esse princípio é uma ferramenta básica para calcular o número total de possibilidades sem precisar enumerá-las, o que às vezes pode ser impossível, devido ao grande número de opções.

O princípio multiplicativo pode ser enunciado da seguinte maneira:

*Se um acontecimento **A** pode ocorrer de **m** maneiras diferentes e um acontecimento **B** pode ocorrer de **n** maneiras diferentes, então o número de vezes que os acontecimentos **A** e **B** podem ocorrer, nesta ordem, é* $m \times n$.

3. a) Imagine um concurso para a escolha do número mais interessante entre:

-50	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	π	$\cong$ 100%

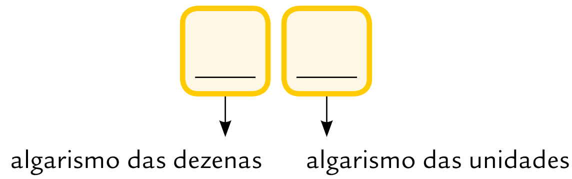
Se não pode haver empate, quantas são as possibilidades para os três primeiros lugares? Mostre como você fez seus cálculos.

b) E para os cinco primeiros lugares? Mostre como fez os cálculos e use a calculadora para obter o resultado.

Formação de números

1. Quantos números naturais de dois algarismos diferentes podemos formar com 1, 7 e 9?

O esquema abaixo pode ajudá-lo a resolver esse problema:



a) Quantos algarismos podem ocupar a casa das dezenas? ______________

b) Como os algarismos precisam ser diferentes, tendo sido escolhido o da casa das dezenas, quantos podem preencher a casa das unidades?

____

c) Então, quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com 1, 7 e 9?

2. Quantos números de dois algarismos podemos formar com 1, 7 e 9 se pudermos repetir os algarismos? E de três algarismos?

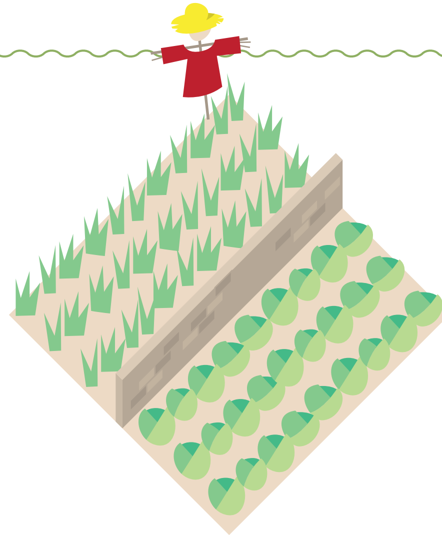
3. Quantos números de 3 algarismos é possível formar utilizando os algarismos 2, 4, 6 e 8, podendo repeti-los?

____

Agora, é com você

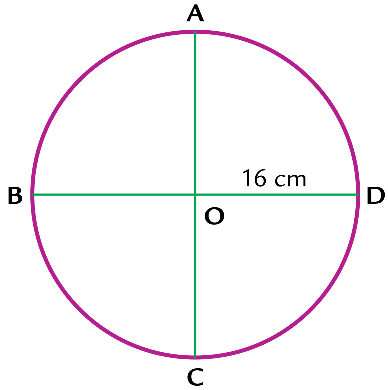
1. Qual é o menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 111 para que a soma seja um quadrado perfeito? Por quê?

2. Um sitiante dividiu um canteiro de forma quadrada com uma mureta, como mostra a figura:



Sabendo que o canteiro tem uma área de 4.225 m^2, qual é o comprimento dessa mureta?

3. Uma circunferência cujo raio mede 16 cm foi dividida em 4 arcos iguais. Qual é a medida de cada arco?



Nos exercícios seguintes, assinale a alternativa correta:

4. O número $\sqrt{200}$ é um número:

☐ a) natural ☐ b) racional ☐ c) inteiro ☐ d) irracional

5. O número π é o quociente entre:

☐ a) o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro.

☐ b) a medida do diâmetro de uma circunferência e o seu comprimento.

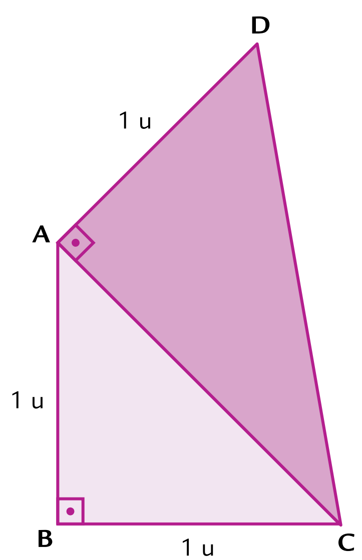
☐ c) o comprimento de uma circunferência e a medida de seu raio.

☐ d) a medida do raio de uma circunferência e o seu comprimento.

6. A área de um quadrado é de 65 cm^2. Cada lado desse quadrado mede:

☐ a) 16,25 cm ☐ b) $\sqrt{260}$ cm ☐ c) $\sqrt{65}$ cm ☐ d) 4.225 cm

7. Na figura, a hipotenusa CD é uma representação geométrica do número:



☐ a) 1

☐ b) 2

☐ c) $\sqrt{2}$

☐ d) $\sqrt{3}$

8. Quantos números naturais de três algarismos sem repetição podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7?

☐ a) 21 ☐ b) 210 ☐ c) 343 ☐ d) 5.040

Unidade 3

Nesta Unidade, a partir de números e formas que se destacam por suas características incomuns e particulares, ampliaremos nossos estudos sobre números irracionais, proporcionalidade entre segmentos de reta e cálculo de áreas.

Ao longo da história, muitos artistas apreciaram a beleza e a harmonia dos retângulos áureos, como testemunha o templo grego Parthenon, construído pelo arquiteto e escultor Fídias no século 5 antes de Cristo.

Retângulos áureos são aqueles cuja razão entre a medida do lado maior e a medida do lado menor é igual ao número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, conhecido como número áureo, ou número de ouro.

Para obter um valor aproximado desse número, digite numa calculadora:

1 + 5 √ = ÷ 2 =

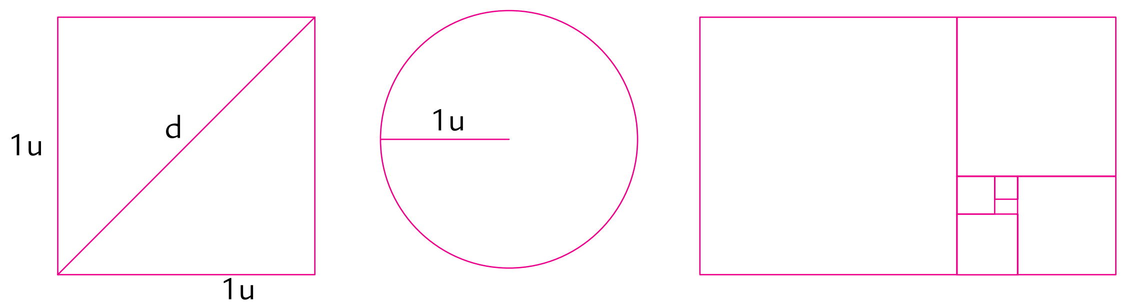
Esse número é irracional, com infinitas casas decimais, e é representado pela letra grega ø (fi), em homenagem ao arquiteto Fídias.

Na maioria das vezes, a imagem do belo é justificada pela harmonia e proporcionalidade entre formas e cores.

WIKIPEDIA.ORG

Representação decimal infinita e não periódica

Os números seguintes não podem ser expressos com precisão na forma decimal, pois têm infinitos algarismos e não são dízimas periódicas.



$d = \sqrt{2}\ u = 1{,}414213562...$ $\quad C = \pi = 3{,}1415...$ $\quad ø = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339...$

Um professor de matemática do 9° ano pediu aos alunos que dessem outros exemplos de números irracionais.

1. Joana escreveu o número irracional 0,246810121416..., colocando a sequência de números pares positivos a partir do 2.
Quais são os próximos quatro algarismos desse número?

____

2. Pedro escreveu o número 0,10110111011110....

a) Qual é o padrão de regularidade desse número?

____

b) Escreva um valor aproximado desse número irracional, com doze casas decimais após a vírgula.

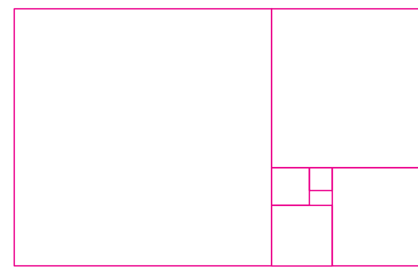
____

3. Complete as sentenças seguintes usando as palavras racional ou irracional:

Todo número que tem uma representação decimal periódica com infinitas ordens é um número ______________________________

Todo número que tem uma representação decimal não periódica com infinitas ordens é um número ______________________________

4. Os retângulos áureos têm uma propriedade curiosa: decompondo-os em um quadrado e um novo retângulo, este também é um retângulo áureo. Decompondo o novo retângulo áureo em um quadrado e um novo retângulo, este também é áureo. Se continuarmos fazendo esse tipo de decomposição, de cada novo retângulo áureo surgirá um outro retângulo áureo, e assim indefinidamente.



Vamos verificar?

a) Meça o comprimento e a largura do retângulo ao lado, parecido com um cartão telefônico. Verifique que ele é quase um retângulo áureo, calculando um valor aproximado da razão áurea, ou seja, da razão entre a medida do maior e do menor lado.

b) Decomponha a superfície retangular acima numa superfície quadrada e numa nova retangular.

c) Meça os lados do retângulo novo e use uma calculadora para dividir a medida do lado maior pelo menor. Qual foi o resultado?

____

Arredondamentos

Há muitas situações nas quais, para efetuar cálculos com medidas, muitas vezes é conveniente trabalhar com valores aproximados, obtidos por arredondamento. Existem algumas regras para arredondar números.

A pedido do professor, alguns alunos escreveram na lousa os seguintes números expressos na sua forma decimal:

Angélica	Paulo	Rosa	Tiago
1,414213562...	1,6180339...	2,38506781	2,39506789

Em seguida, o professor disse que queria trabalhar com esses números com apenas duas casas decimais.

Observe como cada um dos alunos fez o arredondamento:

Angélica	Paulo	Rosa	Tiago
1,41	1,62	2,38	2,39

1. Compare esses arredondamentos com a regra explicada pelo professor, que expressou os números genericamente por meio do seguinte esquema:

parte inteira	,	décimos	centésimos	milésimos	décimos de milésimos	centésimos de milésimos	...
n	,	d	c	m	a	b	...

Em seguida, disse:

Considere o algarismo **m**, que ocupa o ordem dos milésimos;

- Se **m** for 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9, então:

  se **c < 9**, troque o algarismo c pelo seu sucessor;

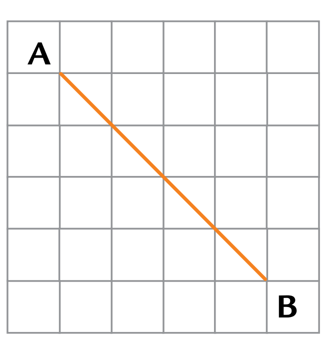
  se **c = 9**, troque o algarismo c por 0 e o algarismo **d** pelo seu sucessor;

  se **c = 9** e **d = 9**, troque-os ambos por 0 e troque **n** pelo seu sucessor;

- Se **m** for 0, ou 1, ou 2, ou 3, ou 4, descarte todas as casas decimais depois da ordem dos milésimos e mantenha os algarismos originais **d** e **c**.

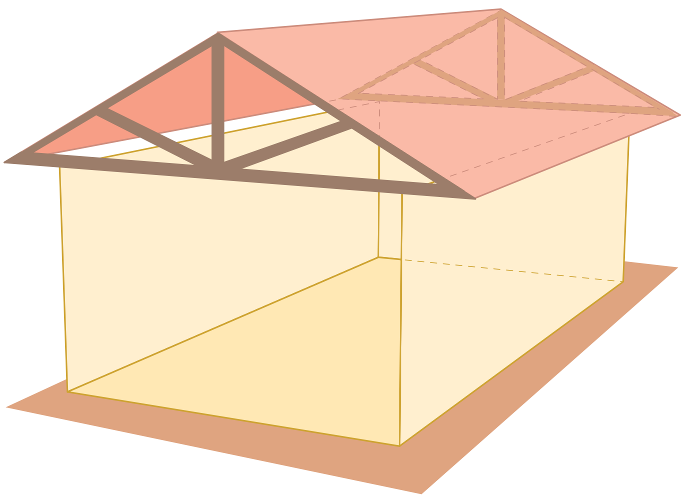
2. Se necessário, corrija os números do quadro que não estão de acordo com a regra dada na atividade 1.

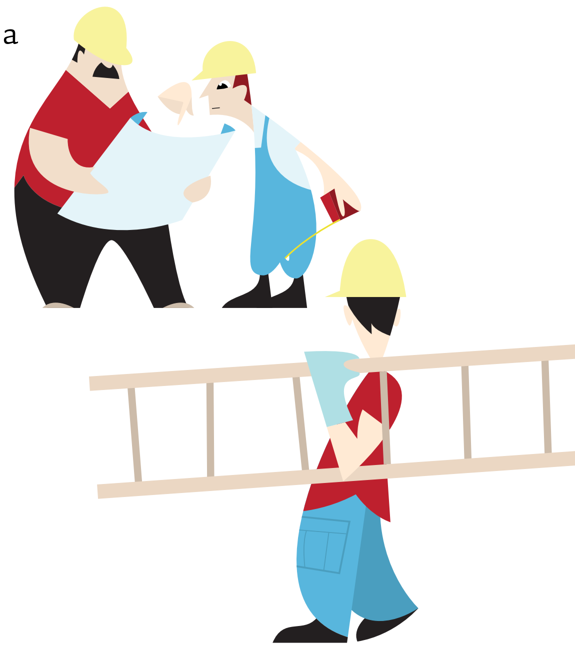
3. Calcule o comprimento do segmento de reta AB desenhado no quadriculado seguinte, em que cada lado do quadradinho é 1 unidade. Arredonde o resultado com duas casas decimais.



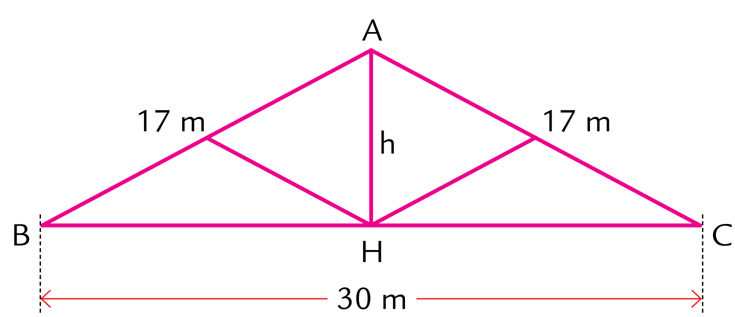
Razão entre segmentos de reta

A figura seguinte é um esboço do galpão de uma pequena fábrica de autopeças:





O triângulo ABC, que representa uma vista frontal da estrutura do telhado do galpão, é isósceles.



1. Pense sobre as seguintes afirmações e tente justificá-las.

a) A altura AH decompõe o triângulo ABC em dois triângulos retângulos.

____

b) Já que o triângulo ABC é isósceles, então as medidas dos catetos BH e CH são iguais a 15 metros.

____

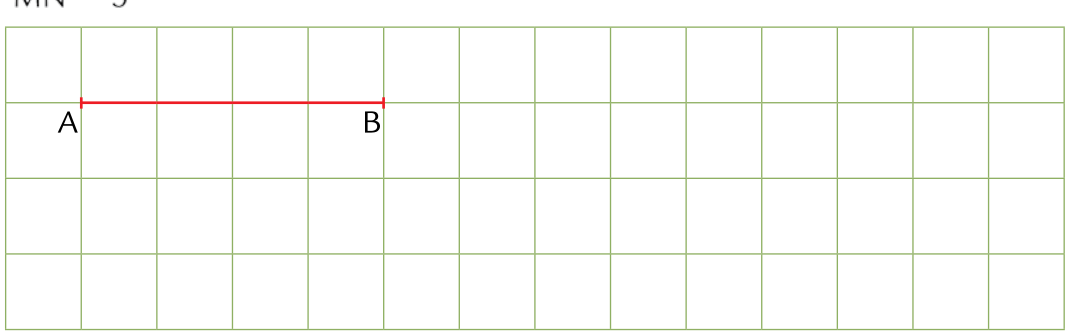
2. Qual é o valor de h? Mostre seus cálculos.

3. Por meio de uma razão numérica, relacione a medida da altura AH e a medida da viga BC.

4. Dizemos que dois segmentos de reta são comensuráveis se a razão entre suas medidas é um número racional.

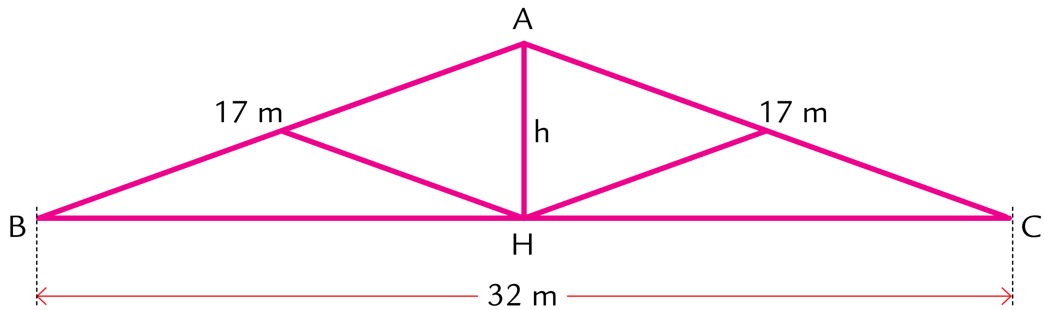
Os segmentos AH e BC são comensuráveis? Justifique sua resposta.

5. Desenhe na malha quadriculada um segmento MN sabendo-se que a razão $\frac{AB}{MN} = \frac{1}{3}$.



Relacionando medidas

Imagine que o triângulo isósceles ABC a seguir representa uma vista frontal da estrutura do telhado de um galpão muito parecido com o primeiro.



O objetivo aqui é o mesmo da página anterior: relacionar a medida da altura AH e a medida da viga BC por meio de uma razão numérica. Use uma calculadora para fazer as atividades seguintes:

1. Qual é a medida da altura AH, representada pela letra h? Mostre seus cálculos e arredonde o valor que você obteve expressando-o com apenas duas casas decimais.

2. Qual é a razão entre a altura máxima do telhado e a largura de uma viga que o sustenta?

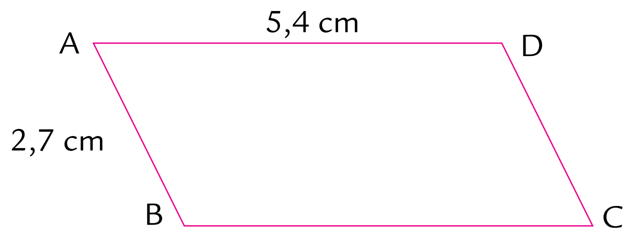
---

3. Dizemos que dois segmentos de reta são incomensuráveis se a razão entre suas medidas é um número irracional.
Os segmentos AH e BC são incomensuráveis? Justifique sua resposta.

Razões entre medidas de segmentos

Vamos combinar: a razão entre as medidas de dois segmentos será sempre calculada na ordem em que estão escritos.

1. Observe o paralelogramo representado na figura.



a) Qual é a razão entre as medidas dos segmentos de reta AB e AD?

---

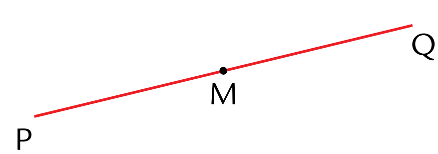
b) Qual é a razão entre as medidas dos segmentos de reta AB e CD?

---

c) Se dois segmentos de reta têm mesma medida (são congruentes), qual é a razão entre eles?

---

2. Na figura seguinte, M é o ponto médio do segmento de reta PQ.



a) O que se pode afirmar sobre as medidas dos segmentos PM e MQ? Justifique sua resposta.

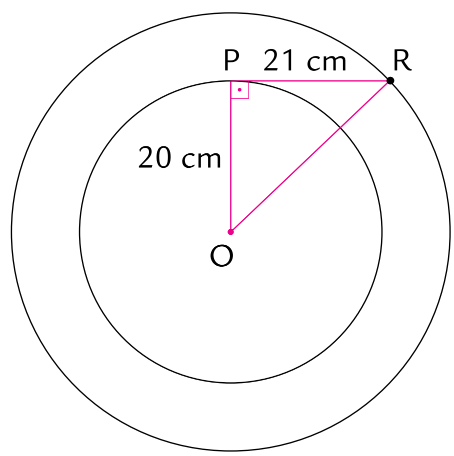
---

b) Calcule a razão entre as medidas dos segmentos de reta PM e MQ.

---

c) Qual é a razão entre as medidas dos segmentos de reta PQ e MQ?

3. Na figura seguinte, as circunferências têm o mesmo centro O (são concêntricas):

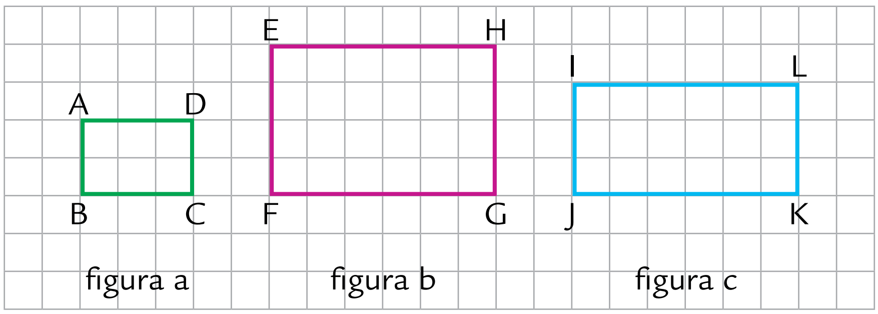


a) Qual é a razão entre a medida do raio da circunferência maior e a do raio da circunferência menor, nesta ordem?

b) Essa razão é um número racional ou irracional?

Proporcionalidade e segmentos de reta

Observe as figuras a, b e c:



1. Determine a razão entre os segmentos AB e EF e a razão entre os segmentos BC e FG. Comparando os resultados, o que você percebeu?

Devido à igualdade entre as duas razões, dizemos que os segmentos de reta AB, EF, BC e FG são, nessa ordem, *proporcionais*, se suas medidas formam uma proporção, e indicamos essa proporcionalidade assim:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$$

2. Observe as figuras a e c.

Verifique se os segmentos de reta AB, IJ, BC e JK são, nessa ordem, proporcionais.

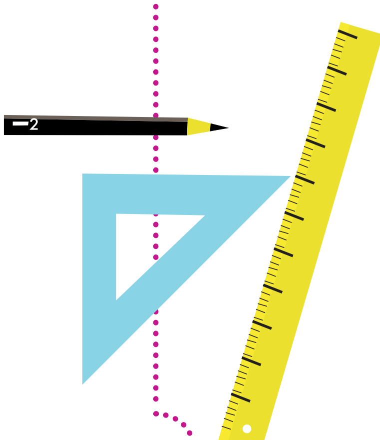
3. Observe as figuras b e c.

Verifique se os segmentos de reta EF, IJ, EH e IL são, nessa ordem, proporcionais.

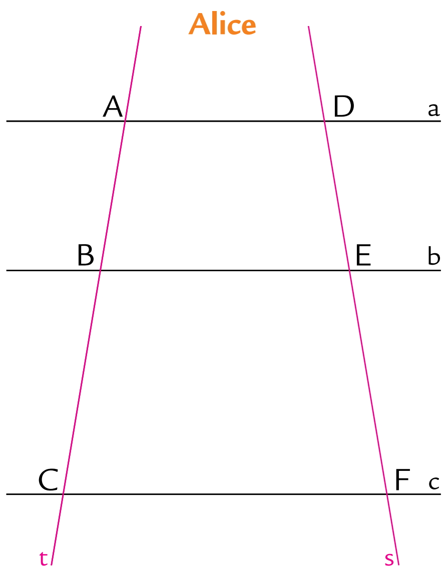
Proporcionalidade e retas paralelas

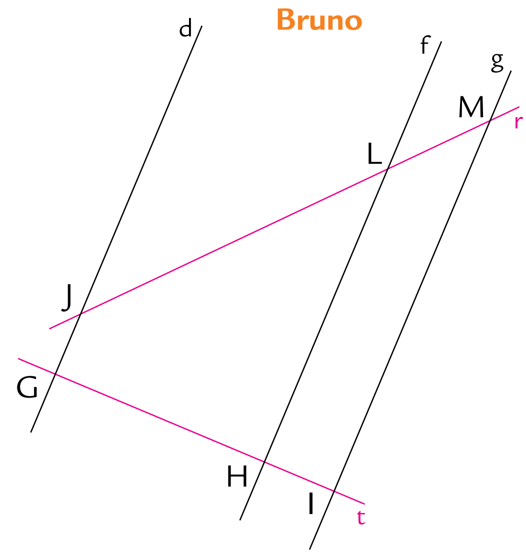
1. Usando régua e esquadro, trace três retas paralelas entre si.
Depois, desenhe duas retas de modo que elas interceptem as três paralelas.

O conjunto de retas paralelas que você desenhou será denominado *feixe de retas paralelas*, e as retas que interceptam esse feixe serão denominadas *transversais*.



2. Alice e Bruno desenharam os seguintes feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais:





a) Meça os segmentos AB, BC, DE e EF e determine as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{DE}{EF}$. Esses segmentos são proporcionais? Por quê?

b) Meça os segmentos GH, HI, JL e LM e determine as razões $\frac{GH}{HI}$ e $\frac{JL}{LM}$. Esses segmentos são proporcionais? Por quê?

Tirando conclusões

1. a) Desenhe um feixe com quatro retas paralelas **r**, **s**, **t** e **u** tais que a distância de **r** a **s** seja 1 cm, a distância de **s** a **t** seja 2 cm e a distância de **t** a **u** seja 3 cm.

c) Trace duas retas **m** e **n** transversais ao feixe de retas paralelas.

d) Meça dois segmentos que a reta **m** forma com o feixe de paralelas e dois segmentos correspondentes que a reta **n** forma com o mesmo feixe.

O que você conclui sobre esses segmentos de reta?

2. a) Desenhe um feixe com quatro retas paralelas **a**, **b**, **c** e **d** tais que as distâncias de **a** a **b**, de **b** a **c** e de **c** a **d** sejam 2 cm.

b) Agora, trace retas m e n não paralelas e transversais ao feixe de paralelas.

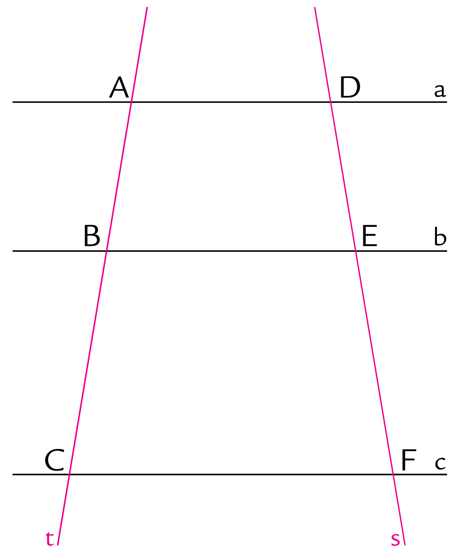
c) Meça dois segmentos que a reta **m** forma com o feixe de paralelas e dois segmentos correspondentes que a reta **n** forma com o mesmo o feixe.

O que você conclui sobre esses segmentos de reta?

Verificações experimentais

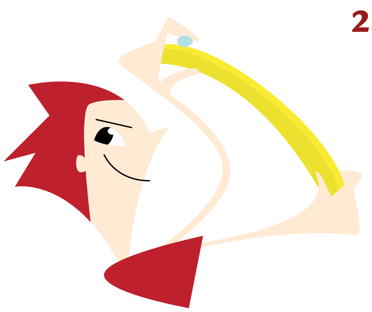
Em todos os feixes de retas paralelas das atividades anteriores, você verificou que a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre dois segmentos correspondentes de outra.

1. No desenho de Alice, as retas **a**, **b** e **c** formam um feixe de retas paralelas cortadas pelas retas transversais **t** e **s**.

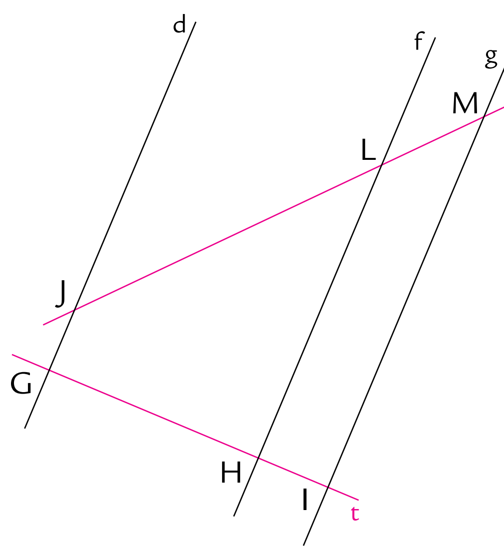


Meça os segmentos AB, BC, DE e EF e escreva a proporção entre eles, nesta ordem.

Vamos manter o que combinamos para razões: a proporção entre as medidas de quatro segmentos proporcionais será sempre calculada na ordem em que estão escritos.



2. No desenho de Bruno, as retas **d**, **g** e **f** formam um feixe de retas paralelas cortadas pelas retas transversais **r** e **t**.



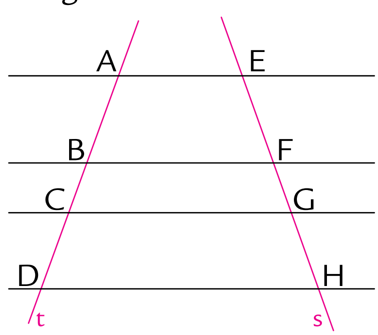
Meça os segmentos GH, HI, JL e LM e escreva, nessa ordem, a proporção entre eles.

Proporcionalidade e o teorema de Tales

O que diz o teorema de Tales?

Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos correspondentes proporcionais.

Observe a figura:



Quem foi Tales?

O filósofo e matemático Tales (624-548 a.C.) nasceu em Mileto, na Ásia Menor.

Tales foi considerado por muitos historiadores um dos primeiros matemáticos responsáveis pela compreensão da geometria como ciência.

Para Tales, uma propriedade, regra ou lei matemática, ao ser demonstrada, sempre tem caráter universal.

"Os teoremas podem ser entendidos como leis matemáticas que podem ser provadas por meio de raciocínio lógico."

Tales de Mileto

A proporção $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$ é uma das que podem ser obtidas a partir do teorema de Tales, mas há muitas outras.

1. Complete as igualdades com medidas de segmentos que tornem verdadeiras as proporções:

$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{BC}{BD} = \frac{FG}{\quad}$

2. Escreva outras três proporções obtidas a partir da última figura.

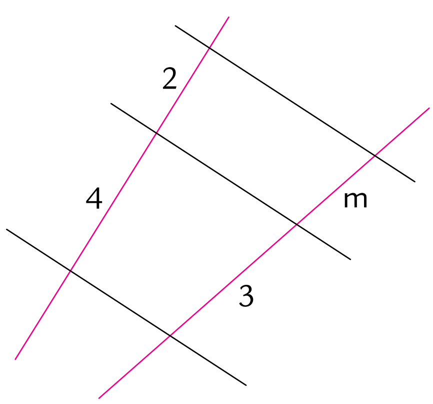
Aplicações do teorema de Tales

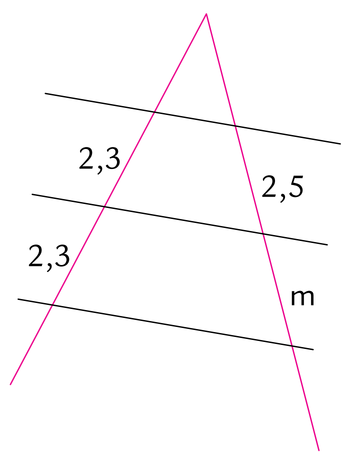
1. Você se lembra da propriedade fundamental das proporções?

Você pode precisar dela para resolver os exercícios seguintes, pois as próximas figuras não estão em escala.

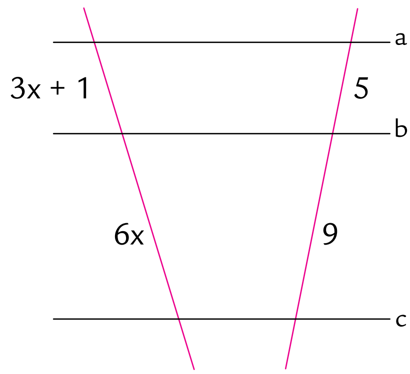
Vamos recordá-la.

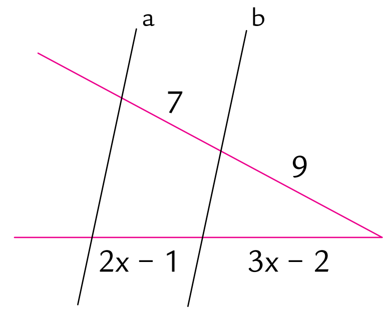
2. Em cada uma das figuras abaixo, há um feixe de três retas paralelas cortado por duas transversais. As medidas indicadas estão em centímetros. Baseando-se no teorema de Tales, determine a medida **m** em cada feixe. Mostre seus cálculos.



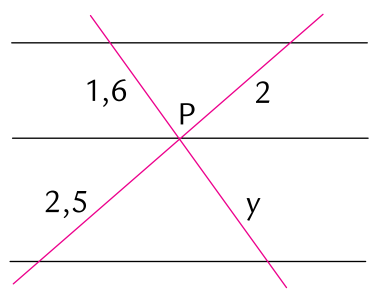


3. Aplicando o teorema de Tales, determine o valor de x nas figuras em que **a**, **b** e **c** são retas paralelas e as medidas indicadas estão em centímetros.



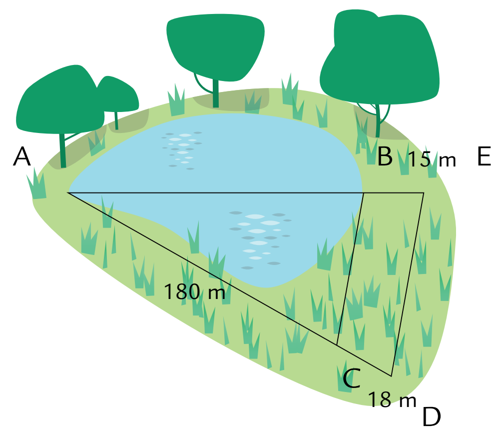


4. A figura mostra três retas paralelas cortadas por duas transversais que se cruzam no ponto P, situado entre as paralelas. Determine o valor da medida y, sabendo que as medidas indicadas estão em centímetros.



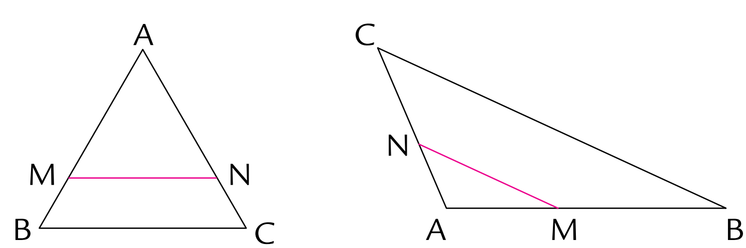
Teorema de Tales: outras aplicações

1. A ilustração mostra a forma como Antônio determinou a largura de um lago entre os pontos A e B. Existem outras maneiras de fazer isso.



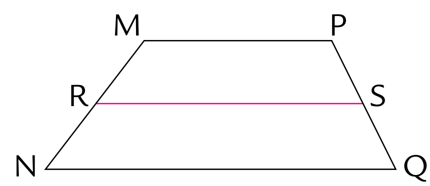
Veja que ele traçou o segmento BC paralelo ao segmento ED e mediu as distâncias indicadas na figura. Mostre a forma de determinar a medida da largura AB do lago calculada por Antônio.

2. Nessas figuras, o segmento MN é paralelo ao lado BC.



Qual é a relação entre as medidas dos segmentos AM, MB, AN e NC, nessa ordem?

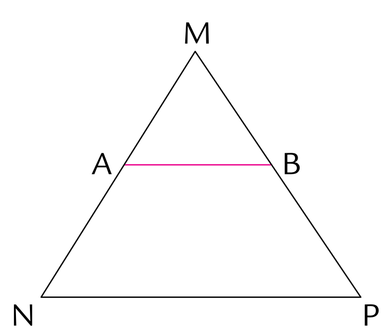
3. No trapézio MNPQ:



- R é o ponto médio do lado MN.
- Pelo ponto R, traçou-se uma reta paralela às bases do trapézio determinando o ponto S no lado PQ.
- O ponto S é ponto médio ao lado PQ. Por quê?

4. Na figura a seguir, a reta AB é paralela ao lado NP do triângulo MNP.

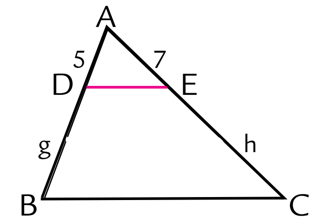
Complete as igualdades de modo que as sentenças se tornem verdadeiras.



a) $\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{\quad}$

b) $\frac{AN}{MN} = \frac{\quad}{MP}$

Proporções em triângulos



1. a) Determine as medidas **g** e **h** no triângulo ao lado, sabendo que o segmento AB mede 18 cm.

b) Invente outras questões usando os dados dessa figura e troque com um colega para analisar o que foi proposto.

2. Num triângulo ABC, os lados AB e AC medem, respectivamente, 9 cm e 7,5 cm. Pelo ponto M, situado no lado AB, a 6 cm do vértice A, traça-se a reta MN paralela ao lado BC, que divide AC em dois segmentos, AN e NC.

a) Desenhe uma figura com as informações dadas no enunciado.

b) Calcule as medidas desses segmentos.

A forma perfeita

Sabemos que, depois da invenção da roda, o mundo não foi mais o mesmo.

Formas circulares como rodas e engrenagens fazem parte do dia a dia das pessoas em objetos, utensílios e brincadeiras, nas artes, nas ciências etc.

Ainda hoje, podemos admirar em algumas construções uma clássica herança greco-romana: enormes colunas cobertas por um capitel.

WIKIPEDIA.ORG

figura 1: detalhe de capitel grego.

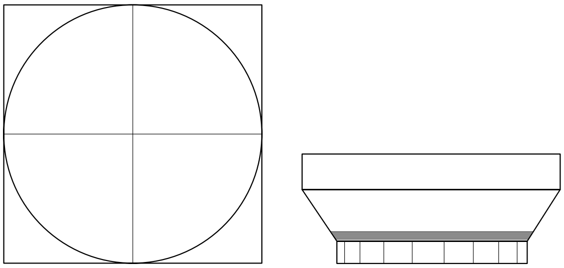


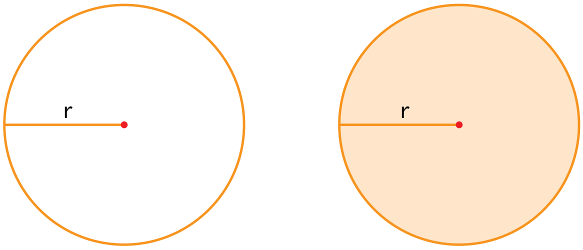
figura 2: desenho em vistas do capitel.

Na figura 2, o desenho à esquerda é uma vista superior do capitel, em que se destaca a forma geométrica de um *círculo inscrito* em um quadrado, ou um *quadrado circunscrito* a um círculo, formas consideradas perfeitas pelos gregos.

1. Cite dois objetos que tenham alguma parte circular.

---

2. As figuras abaixo representam uma circunferência e um círculo.



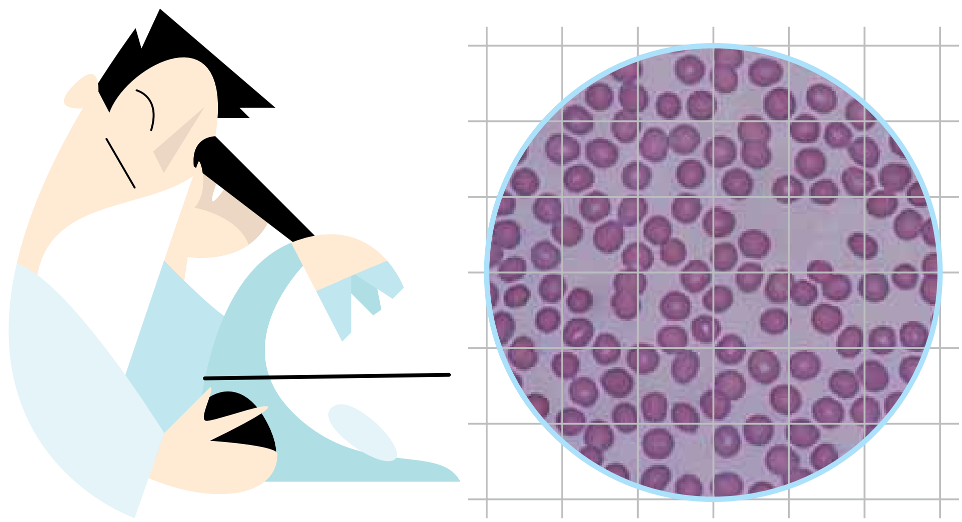
circunferência

círculo

Identifique uma diferença geométrica entre essas duas figuras.

Construindo procedimentos

A figura seguinte é formada por uma malha quadriculada em que a distância entre duas retas consecutivas é de 1 cm e por um círculo cujos raios medem 3 cm.



BOBJGALINDO/WIKIPEDIA.ORG

1. Faça uma estimativa da área desse círculo. Para isso, veja algumas sugestões.

a) Conte o número máximo de quadrados com área de 1 cm^2 inteiramente contidos no círculo.

____

b) Conte o número mínimo de quadrados com área de 1 cm^2 que contém o círculo.

____

c) Observe os resultados que você encontrou e complete a sentença:

A área do círculo é maior que ______________________________

e a área do círculo é menor que ______________________________

2. Usando compasso e tesoura:

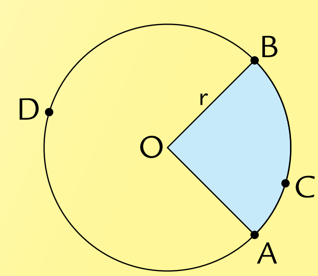
a) Desenhe em uma folha de papel colorido dois círculos cujos raios tenham a mesma medida.

b) Divida um dos círculos em quatro setores circulares iguais.

c) Recorte esses setores, componha com eles uma nova figura e cole-a no espaço abaixo.

d) Divida o outro círculo em oito setores circulares iguais e faça o mesmo que no círculo anterior.

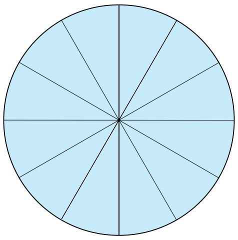
Setor circular é uma região de um círculo limitada por dois de seus raios e pelo arco que eles determinam.



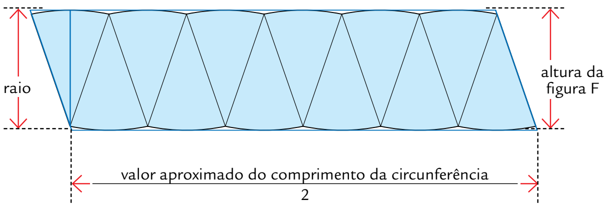
Fazendo conjecturas

Veja como a atividade anterior pode sugerir uma forma de calcular a área de um círculo: divida o círculo em setores pequenos e calcule a área da figura composta por esses setores.

1. Observe este desenho de Pedro. Ele dividiu um círculo em 12 setores iguais.



Depois, fez uma composição com esses setores, obtendo a figura F.



Com que quadrilátero se parece o contorno da figura F?

____

2. Pedro observou que a altura da figura F é quase igual ao raio do círculo, e sua base é quase a metade do comprimento da circunferência.
Você concorda com essas observações?

____

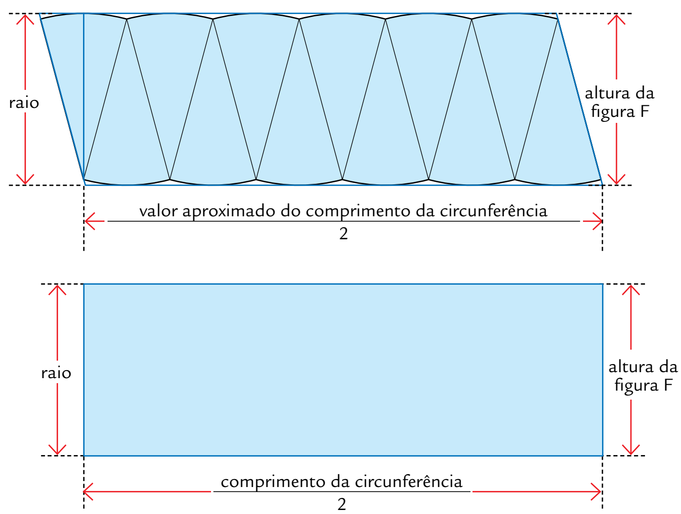
____

3. O que acontecerá com a altura e a "base" da figura F se continuarmos aumentando o número de setores em que o círculo foi dividido em partes iguais (100, 1.000... 1.000.000...)?

____

Área de círculo

Como “pensamento não tem cerca”, Pedro imaginou o círculo dividido em muitos setores e concluiu que a figura F se aproxima cada vez mais de uma superfície retangular cujas dimensões têm como medida o raio do círculo e a metade do comprimento da sua circunferência.



1. Você concorda com Pedro? Justifique sua resposta.

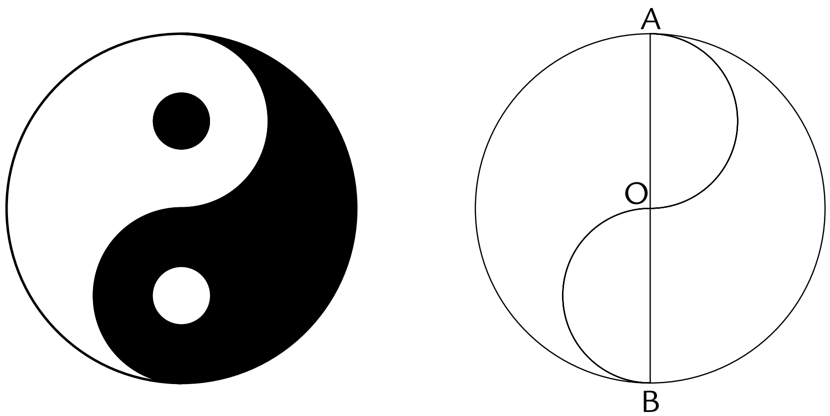
2. Se representarmos a medida dos raios do círculo pela letra **r**, como você representaria as medidas da altura e da base do retângulo?

3. Escreva uma fórmula para calcular a área dessa superfície retangular.

4. Escreva a fórmula para calcular a área de um círculo cujos raios medem **r**.

Yin e yang: harmonia e equilíbrio

1. Você conhece o símbolo oriental *yin* e *yang*? Ele é representado por um círculo dividido em duas regiões congruentes. Essas regiões simbolizam duas forças complementares que compõem tudo o que existe e o equilíbrio entre essas forças. Observe que, dentro de cada região, há um pouco da outra.

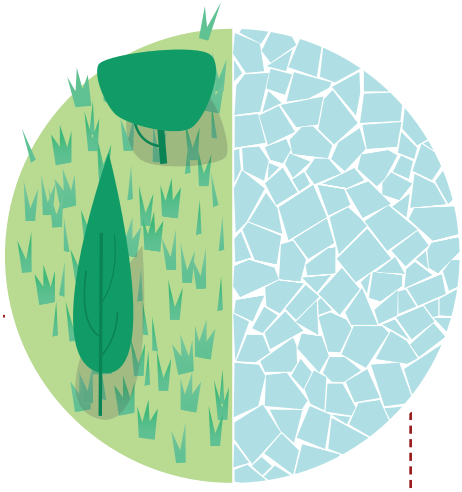


No esboço ao lado do símbolo *yin* e *yang*, há um círculo de centro O e diâmetro AB, que mede 20 cm.

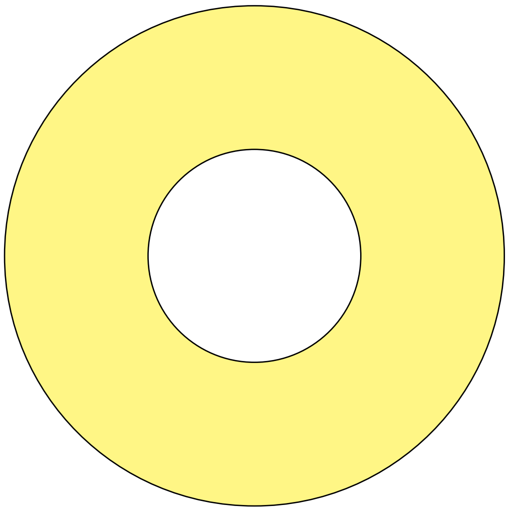
Determine a área de cada uma das regiões que compõem o símbolo *yin* e *yang*, sem levar em conta os dois círculos menores que estão dentro de cada uma.

Mostre como você fez seus cálculos.

2. Em um canteiro circular com 4 m de raio, apenas a metade foi gramada.
Calcule a área exata da região gramada e mostre como você fez os cálculos.



3. Na figura a seguir, as circunferências são concêntricas, ou seja, têm o mesmo centro. A região em amarelo é denominada *coroa circular*.



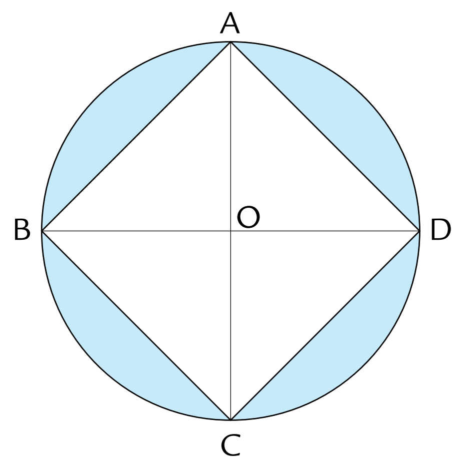
Se as circunferências têm raios de 3 cm e 7 cm, qual é a área dessa coroa circular?

Polígonos inscritos e circunscritos

Um *polígono* está *inscrito* em uma circunferência quando cada vértice do polígono é um ponto da circunferência.

Nesse caso, dizemos também que a circunferência circunscreve o polígono.

Na figura, o quadrado ABCD está inscrito na circunferência de centro O, cujos raios medem 10 cm.



Use $\pi \cong 3{,}14$ e mostre como você calculou a área aproximada.

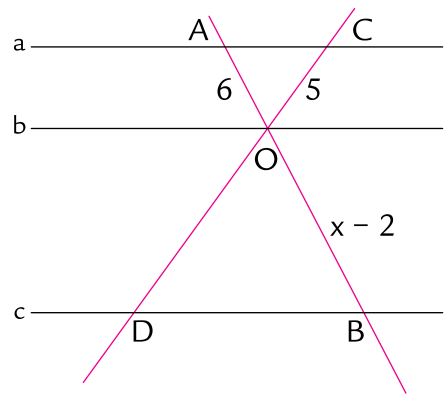
a) do círculo:	**b)** da superfície quadrada:	**c)** da região pintada de azul:

Um *polígono* está *circunscrito* a uma circunferência quando seus lados são tangentes à circunferência, ou seja, quando são perpendiculares aos raios cuja extremidade é um ponto de tangência.

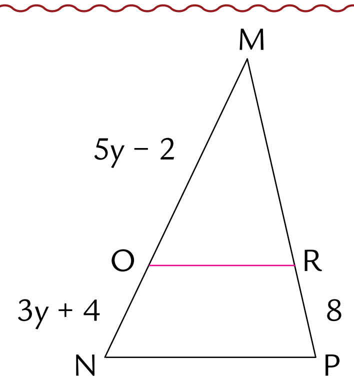
Dizemos também que essa *circunferência* está *inscrita* no polígono.

Agora, é com você

1. As retas **a**, **b** e **c** formam um feixe de paralelas. Determine a medida do segmento AB, sabendo que as medidas indicadas estão em centímetros e o segmento CD mede x cm.

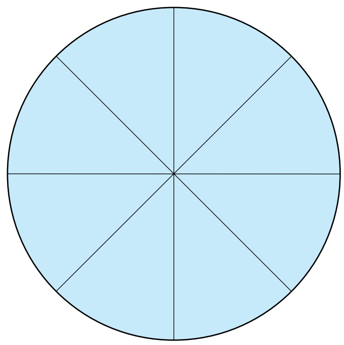


2. Na figura seguinte:



a reta OR é paralela ao lado NP do triângulo MNP, e o lado MP mede 18 cm. Qual é a medida do lado MN?

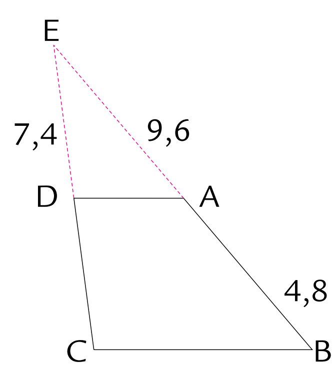
3. Um disco de pizza tem 40 cm de diâmetro. Essa pizza é servida em 8 fatias iguais. Use $\pi \cong 3{,}14$ e determine a área aproximada de cada fatia.



4. Dentre os números $-0{,}62$; $-\frac{3}{8}$; $\frac{24}{8}$; $\sqrt{5}$; 2π e $3{,}050050050005$, são irracionais:

- [ ] a) $-\frac{3}{8}$ e $3{,}050050050005$
- [ ] b) $-0{,}62$ e $\sqrt{5}$
- [ ] c) 2π e $3{,}050050050005$
- [ ] d) $\sqrt{5}$ e 2π

5. Os prolongamentos dos lados não paralelos do trapézio ABCD se encontram num ponto E. As medidas indicadas na figura estão em centímetros.



A medida do lado DC é:

- [ ] a) 3,7 cm
- [ ] b) 3,8 cm
- [ ] c) 4,2 cm
- [ ] d) 4,6 cm

6. Os raios dos círculos C_1 e C_2 medem 6 cm e 18 cm. A razão entre as áreas de C_1 e de C_2 é:

- [ ] a) $\frac{1}{6}$
- [ ] b) $\frac{1}{3}$
- [ ] c) $\frac{1}{9}$
- [ ] d) $\frac{6}{18}$

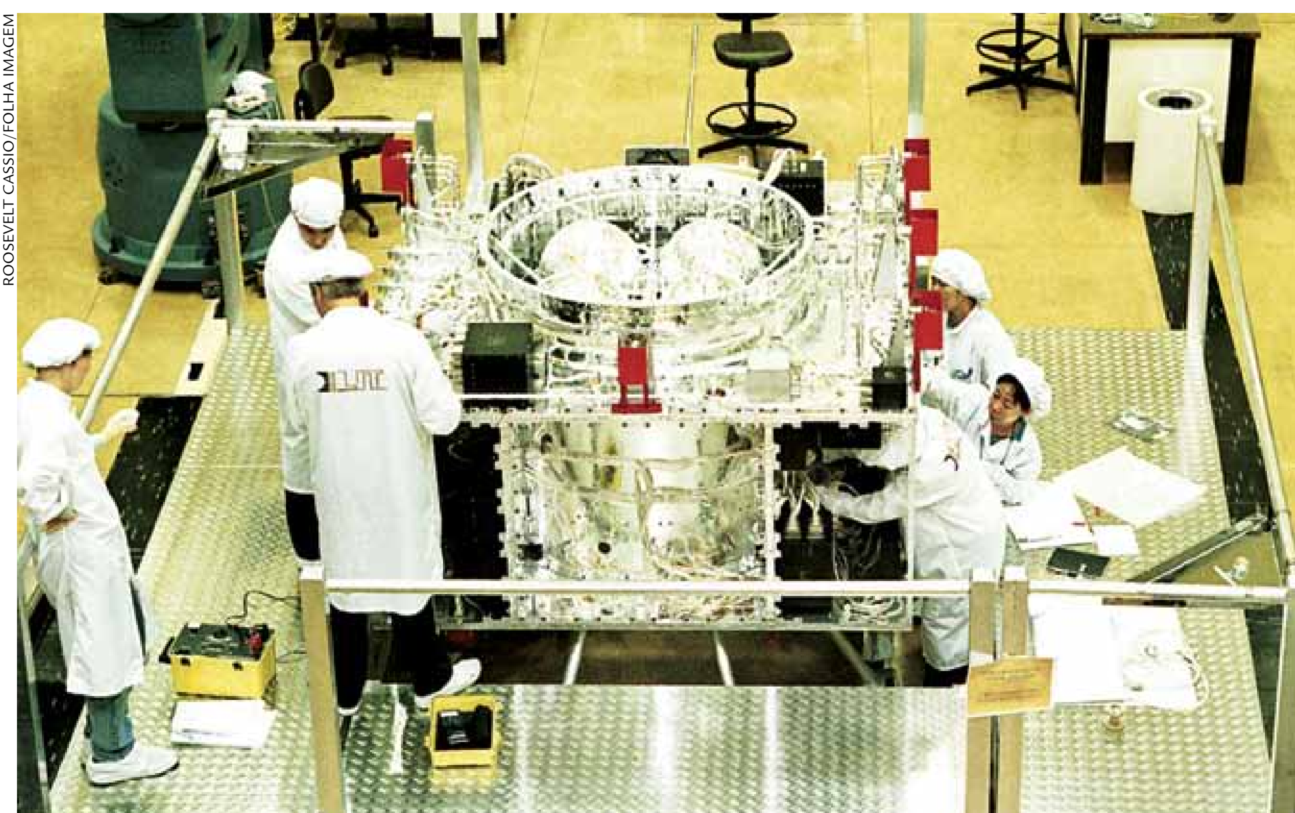
UNIDADE 4

Nesta Unidade, trabalharemos operações com números irracionais e situações-problema que envolvem a divisão de segmentos de reta em partes proporcionais e equações do 2º grau.

Muitas pessoas operam diariamente com números racionais, e, entre elas, uma parcela significativa de profissionais (cientistas, físicos, engenheiros, estatísticos, químicos, biólogos, economistas, administradores, financistas, atuários, astrônomos, para citar alguns) também usa números irracionais.

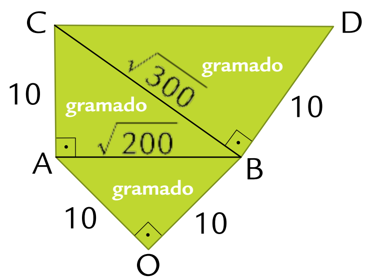
Que operações você acha que podem ser feitas com números irracionais?

ROOSEVELT CASSIO/FOLHA IMAGEM



Adição e subtração

Às vezes, como aqui, usamos modelos geométricos para favorecer a representação e a identificação de elementos envolvidos nos conceitos algébricos estudados. Imagine que essa figura representa um parque público:



As medidas dos segmentos são expressas em quilômetros.

A distância exata percorrida por alguém que passa pelos segmentos OA, AB e BC pode ser indicada pela soma:

$(10 + \sqrt{200} + \sqrt{300})$ km

1. Faça uma estimativa, na forma decimal, dessa distância.

---

2. Compare sua estimativa com o valor aproximado que se obtém digitando na calculadora a seguinte sequência de teclas:

---

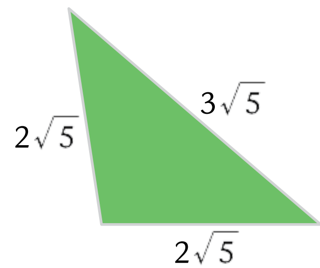
3. Qual é distância exata que uma pessoa percorre a mais no segmento BC do que no segmento AB? Justifique sua resposta apresentando seus cálculos.

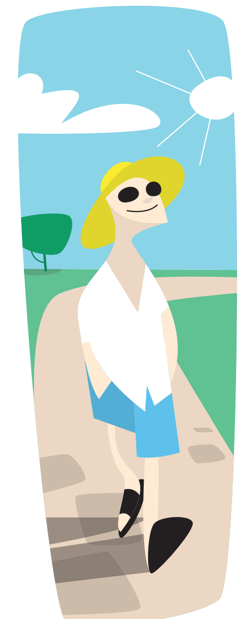
---

4. Com uma calculadora, obtenha um valor aproximado da distância percorrida a mais nesse percurso.

A praça triangular

A figura a seguir representa uma praça triangular com as medidas indicadas em quilômetros.





Qual é a distância percorrida por uma pessoa que dá uma volta completa nessa praça caminhando sobre os segmentos?

1. Como você resolveria esse problema? Descreva seu procedimento e justifique sua resposta.

____

____

____

2. Veja como Pedro escreveu a soma $2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ de uma forma reduzida, ou seja, mais curta. Aplicou o caminho inverso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e colocou o fator comum $\sqrt{5}$ em evidência.

fator comum em evidência

$$2\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5}\cdot(2 + 2 + 3) =$$

$\sqrt{5}$ é fator comum

a) Complete os cálculos de Pedro efetuando a adição indicada entre parênteses.

____

b) Qual é o valor exato dessa soma?

____

3. a) Todas as parcelas que compõem a soma $2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ têm radicais com índices e radicandos iguais?

b) Nesse caso, é possível reduzir a soma a um só termo? Justifique sua resposta.

4. Calcule:

$-7\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 3\sqrt{5} =$

5. O resultado de $9\sqrt{10} + \sqrt{10} - 8\sqrt{10} - 2\sqrt{10}$ é um número irracional? Justifique sua resposta.

Mais conhecimentos sobre adição e subtração

1. Use uma calculadora para determinar um valor aproximado da soma $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

A partir do valor que você obteve, qual das afirmações seguintes é correta?

☐ a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ☐ b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{5}$ ☐ c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$

2. Se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ representam números irracionais e precisamos de um valor aproximado na forma decimal do número $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, devemos estimar um valor aproximado para cada uma das parcelas e adicioná-los.

Podemos afirmar, que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$.

a) Existe algum caso em que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

b) Se você acredita que existe, então mostre um exemplo.

c) Se você não acredita que existe, então tente explicar porque isso ocorre.

3. Qual das afirmações seguintes é correta? Justifique sua resposta.

☐ a) $\sqrt{300} - \sqrt{200} = \sqrt{100}$ ☐ b) $\sqrt{300} - \sqrt{200} < \sqrt{100}$ ☐ c) $\sqrt{300} - \sqrt{200} > \sqrt{100}$

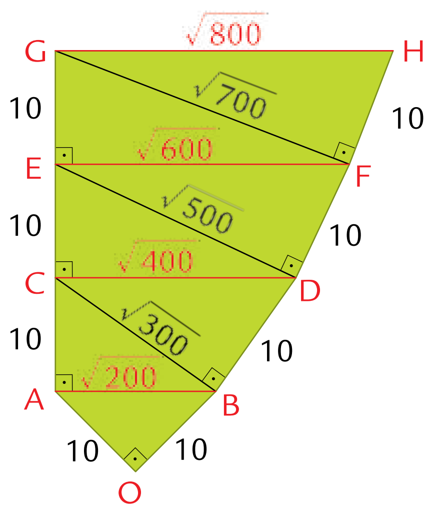
4. Podemos afirmar que, em geral:

$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Dê um exemplo em que $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Trilhas de corrida

Os segmentos pretos e vermelhos da figura seguinte representam algumas trilhas de corrida em um parque, em metros.



Responda às atividades seguintes calculando os valores exatos e os aproximados, com duas casas decimais.

1. Qual é a distância, em metros, percorrida por uma pessoa que usa as trilhas AG e GH?

____

2. Calcule as diferenças exatas e aproximadas entre as medidas dos segmentos:

a) AB e OA ____

b) BC e AB ____

c) FG e EF ____

d) GH e FG ____

3. Qual é o caminho mais curto para ir do ponto A até o ponto H caminhando sobre os segmentos destacados?

4. Qual é a distância em linha reta do ponto A ao ponto H?

5. Na figura a seguir:

qual é a distância percorrida por uma pessoa que sai do ponto A, passa pelos pontos B, C e D e volta ao ponto A, sempre caminhando sobre a fronteira do terreno?

Use $\sqrt{2} \cong 1{,}41$ e $\sqrt{5} \cong 2{,}24$.

Vende-se terreno

É muito provável que você nunca tenha visto um anúncio do tipo:

Mas, em um esforço de imaginação, suponha que as dimensões de um terreno retangular ABCD sejam expressas por números irracionais.

Para determinar a área exata desse terreno, resolva as próximas atividades.

1. Ler um problema é entender todas as informações que ele dá, e analisar a importância de cada uma. Assim, procure ler atentamente o problema, para buscar o que é preciso para resolvê-lo.

Justifique sua resposta apresentando seus cálculos.

____

2. Use uma calculadora para obter uma área aproximada desse terreno.

____

3. Explique seus procedimentos.

____

Supondo e verificando

1. Para determinar a área do terreno da atividade anterior:

- Neusa calculou os valores aproximados de $\sqrt{200}$ e $\sqrt{500}$ e multiplicou-os
- Mateus calculou $200 \times 500 = 100.000$ e depois, $\sqrt{100.000}$.
- Os resultados coincidem?

---

2. Você pode comprovar as respostas digitando a seguinte sequência de teclas:

2 0 0 √ × 5 0 0 √ =

E verificando se a raiz quadrada de 100.000 tem o mesmo valor aproximado do último valor que você obteve.

$\sqrt{200} \times \sqrt{500} = \sqrt{200 \times 500}$? Justifique sua resposta apresentando seus cálculos.

---

3. Se você trocar os valores 200 e 500 por outros valores convenientes, obterá igualdades ou desigualdades?

---

4. Experimente e substitua ? pelo sinal = ou ≠.

a) $\sqrt{16} \times \sqrt{25}$? $\sqrt{16 \times 25}$

b) $\sqrt{81} \times \sqrt{100}$ **?** $\sqrt{81 \times 100}$

c) $\sqrt{66} \times \sqrt{3}$ **?** $\sqrt{66 \times 3}$

5. De modo geral, se **a** e **b** representam quaisquer números não negativos, o que significa a propriedade $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$?

6. Compare sua resposta da atividade anterior com o texto a seguir e complemente-a.

A propriedade $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ significa que podemos calcular os valores de $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ e multiplicá-los ou primeiro calcular o produto $a \times b$ e depois, $\sqrt{a \times b}$, pois os dois resultados são iguais.

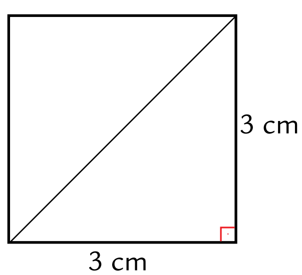
Deduzindo fórmula

A propriedade da multiplicação de números expressos na forma de radicais que acabamos de estudar pode ser usada em algumas situações.

Por exemplo, o número $\sqrt{8}$ pode ser "fatorado", transformando-o em um produto de radicais:

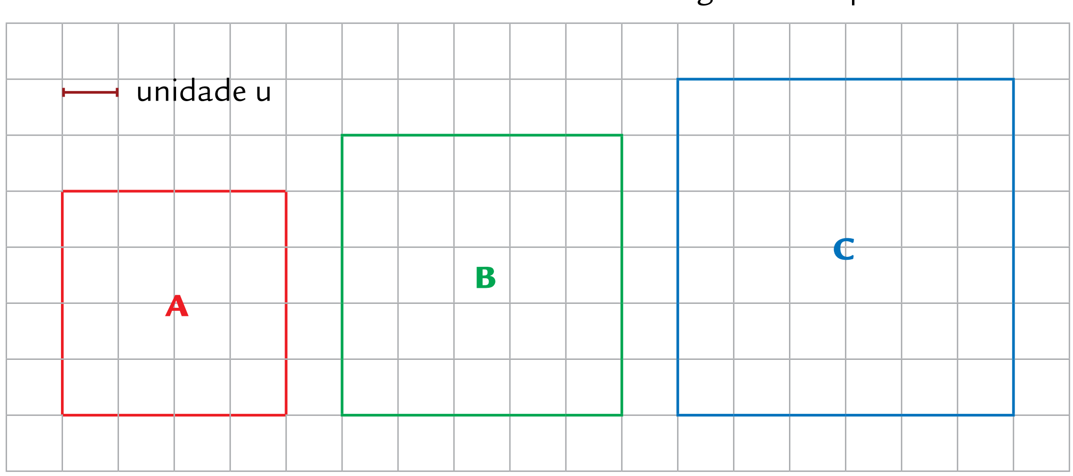
$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

1. a) Calcule a medida de uma diagonal do quadrado abaixo e mostre como você fez seus cálculos.

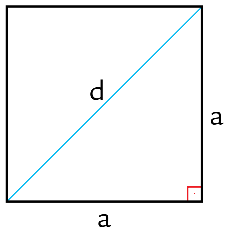


b) "Fatore" o resultado que você encontrou, transformando-o em um produto de radicais.

2. Escreva na forma fatorada a medida de uma diagonal dos quadrados abaixo:



3. Agora, escreva uma fórmula que relacione a medida de uma diagonal de um quadrado com a medida dos lados.



a) Que conhecimento matemático você usou para resolver essas situações?

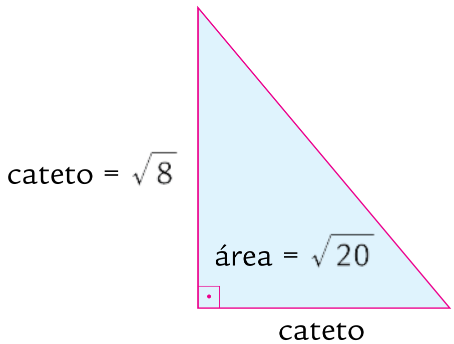
b) Como você pensou para encontrar uma fórmula para calcular a medida de uma diagonal de um quadrado?

4. Essa relação vale para todos os quadrados? Justifique sua resposta.

5. Qual é a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro é igual a 132 mm? Registre sua resolução.

Divisão de números irracionais

A área da região limitada por um triângulo retângulo é de $\sqrt{20}$ m^2, e um de seus catetos mede $\sqrt{8}$ m. Determine a medida do outro cateto.



medida dos catetos em metros
e área em metros quadrados

1. A área da superfície limitada por um triângulo retângulo = $\dfrac{\text{medida de um cateto} \times \text{medida do outro cateto}}{2}$.

Use essa fórmula e escreva uma equação que represente o enunciado do problema.

2. O que você tem que fazer para obter a medida exata do cateto? Justifique sua resposta apresentando seus cálculos.

3. Com uma calculadora, determine uma medida aproximada desse cateto.

Saiba mais sobre divisão

1. Para determinar a medida do outro cateto do triângulo, Mariana escreveu o quociente $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}}$ m, mas ficou em dúvida sobre como fazer essa divisão:

Ou seja, ela quer saber se $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{20}{2}}$.

Para elucidar a dúvida de Mariana, use uma calculadora e verifique se os resultados coincidem.

---

2. Se os números 20 e 2 forem trocados por quaisquer outros valores positivos, o procedimento para obter o quociente das raízes quadradas desses números seria exatamente o mesmo.

Experimente.

a) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{64}{16}}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}}$

3. De modo geral, se **a** e **b** representam quaisquer números positivos, o que significa a propriedade $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$?

---

4. Compare sua resposta com o texto a seguir e complemente o que você escreveu na atividade anterior.

A propriedade $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ significa que podemos calcular os valores de $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ e dividi-los ou primeiro calcular o quociente $a \div b$ e depois, sua raiz, pois o resultado é o mesmo.

Operações com números irracionais

Calcule os resultados, dando a resposta na forma exata:

1. $7\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + \sqrt{7} =$ ____________________

2. $-4\sqrt{10} + 16\sqrt{10} - 25\sqrt{10} =$ ____________________

3. $\sqrt{16} \cdot \sqrt{36} =$ ____________________

4. $\sqrt{100} \cdot \sqrt{121} =$ ____________________

5. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} =$ ____________________

6. $\sqrt{\dfrac{121}{11}} =$ ____________________

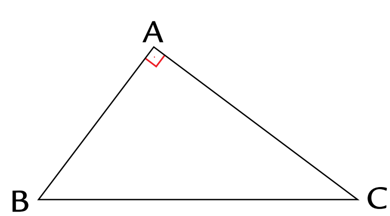
7. $\sqrt{\dfrac{144}{36}} =$ ____________________

Caminho inverso do teorema de Pitágoras

1. O que a outra pessoa quis dizer com sua resposta?

---

2. Chamando de **a** a medida da hipotenusa, de **b** a medida do cateto AC e **c** a medida do cateto AB, enuncie o teorema de Pitágoras.



Teorema é uma afirmação verdadeira que pode ser comprovada matematicamente por meio de outros argumentos verdadeiros.

A afirmação seguinte é o teorema recíproco do teorema de Pitágoras:

Se **a**, **b** e **c** são as medidas dos lados de um triângulo e se $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo.

Agora, você vai aplicar esse teorema recíproco. Imagine que os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2+3}$ são as medidas dos lados de um triângulo.

a) Qual dessas medidas é a maior?

---

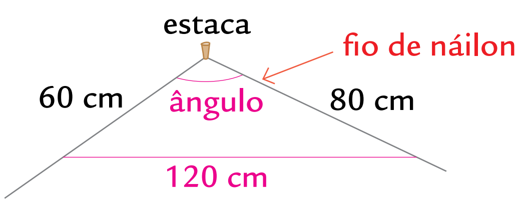
b) Qual dessas medidas pode ser considerada a hipotenusa?

---

c) Aplique o teorema recíproco do teorema de Pitágoras a esses três números e verifique se formam um triângulo retângulo.

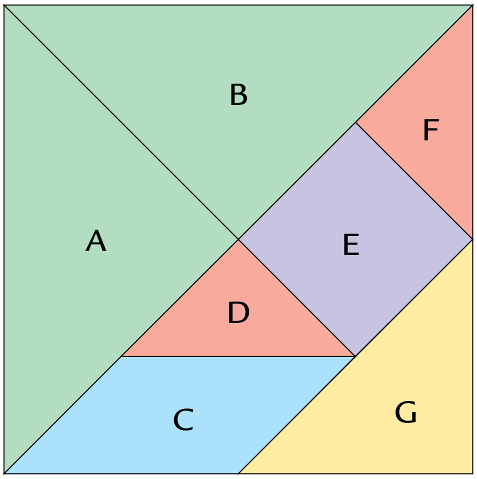
---

3. Para marcar um dos cantos retos de uma sala que vai ser construída, um pedreiro amarrou um fio de náilon numa estaca, formou um ângulo com esse fio com vértice nessa estaca e marcou dois lados de um triângulo de dimensões 60 cm e 80 cm. Veja a figura ilustrativa:



Para verificar se o triângulo era retângulo, ele mediu o terceiro lado e obteve 120 cm.

A figura feita pelo pedreiro é realmente um triângulo retângulo? Justifique sua resposta.



Tangram e os números irracionais

Observe as peças do tangram que compõem uma superfície quadrada cujos lados medem 8 cm.

Mostre como você fez seus cálculos.

1. a) Qual é a medida de cada um dos lados do triângulo que limita a superfície A?

b) Verifique se esse triângulo é retângulo.

2. Qual é o perímetro do triângulo que limita a superfície B? Esse triângulo é retângulo?

3. Qual é a área da superfície triangular F?

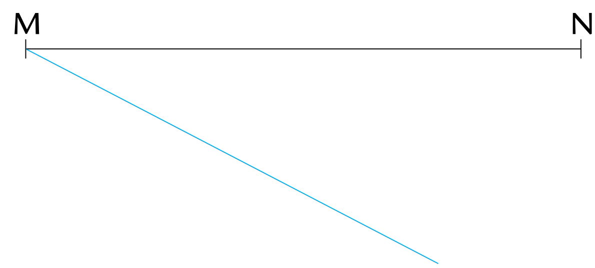
4. Qual é o perímetro do paralelogramo que limita a superfície C?

5. Qual é a área da superfície quadrangular E?

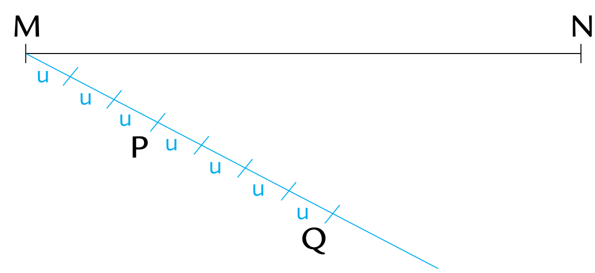
6. Qual é o perímetro do triângulo que limita a superfície G?

Dividir segmentos em partes proporcionais

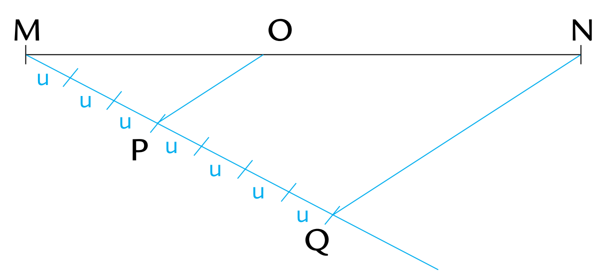
Em uma aula de matemática, uma professora pediu a seus alunos que desenhassem um segmento com 10 cm de comprimento e o dividissem em duas partes proporcionais a 3 e 4.



Rita traçou um segmento MN de 10 cm e uma semirreta de origem M, mas com direção diferente da direção desse segmento.



Depois, ela escolheu uma unidade de comprimento u qualquer e, com um compasso, marcou sobre a semirreta os pontos P e Q de modo que MP = 3 u e PQ = 4 u.



Depois, ela traçou o segmento QN e pelo ponto P, uma reta paralela a ele.

Finalmente, ela concluiu que o ponto O divide o segmento MN em duas partes proporcionais a 3 e 4.

a) Use uma folha de papel em branco para traçar um segmento de 10cm de comprimento dividido em duas partes proporcionais a 3 e 4.

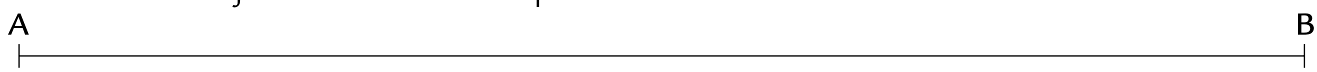
b) Você acha que Rita resolveu corretamente o problema?

c) Que argumentos você usaria para sua resposta?

Exercícios

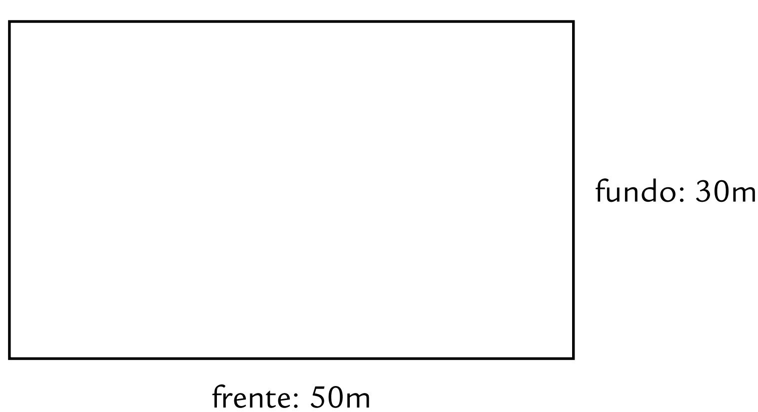
1. Fazendo um croqui (esboço de um desenho), um projetista deparou com o seguinte problema: como dividir um segmento com 17 cm de comprimento em 6 partes iguais?

Ajude-o a resolver esse problema.

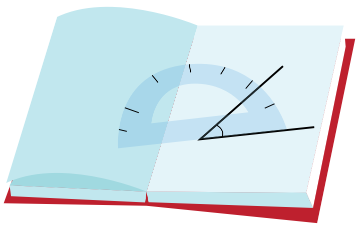


2. Para construir três casas em um terreno com 50 m de frente e 30 m de fundo, um construtor vai dividi-lo em três lotes com frentes proporcionais aos números 2, 3 e 4. Os três lotes terão fundos iguais a 30 m.

Apresente uma resolução geométrica para o problema.



Contatos imediatos do 2º grau



Grau é uma unidade de medida de ângulos obtida pela divisão da circunferência em 360 partes iguais.

1. Você já usou a palavra grau? Em que situação?

---

2. Nas próximas atividades, estudaremos equações do 2° grau. Antes, porém, retomaremos algumas propriedades para você justificar.

a) Você já deve ter ouvido a frase: "É proibido dividir por zero." Por que não se pode dividir por zero?

---

b) Se **a** e **b** representam números racionais ou irracionais e se $a \cdot b = 0$, o que se pode concluir sobre **a** ou sobre **b**?

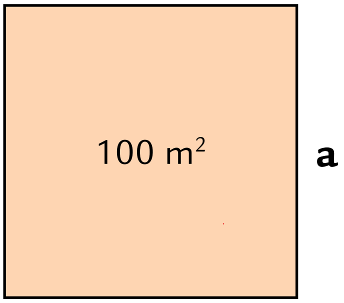
---

c) Se **a** e **b** representam números racionais ou irracionais e se $a \div b = \frac{a}{b} = 0$, a conclusão possível é $a = 0$ e $b \neq 0$. Por quê?

Área de um quadrado e equação do 2º grau

Com seu colega de dupla, analise, discuta e equacione este problema:

1. Um terreno delimitado por um quadrado tem área de 100 m^2.



a) Se **a** representa a medida dos lados desse terreno, escreva uma equação cuja incógnita seja **a** para expressar sua área.

---

b) A equação que você escreveu é de 2° grau? (Ou seja, o expoente da incógnita **a** é 2?)

---

c) Lembre-se do que aprendeu sobre raiz quadrada nas Unidades anteriores para solucionar a equação que você escreveu. Mostre como você pensou para encontrar a resposta.

d) Quantas soluções tem essa equação?

---

e) Qual é a única solução adequada ao problema proposto? Justifique sua resposta.

2. Se um terreno limitado por um quadrado tivesse área de 120 m^2, qual seria o valor exato da medida dos seus lados? O que você usou para resolver esse problema?

3. A diagonal de um quadrado mede 10 cm.

a) Quanto mede cada lado desse quadrado?

b) Qual é o seu perímetro?

c) Qual é a sua área?

Equações do 2º grau: coeficientes e raízes

Nas equações do 2° grau do tipo: $\mathbf{a \cdot x^2 = c}$ ou $\mathbf{a \cdot x^2 - c = 0}$

- a letra **a** representa um número conhecido qualquer, com uma única exceção: $a \neq 0$.
- A letra **c** também representa um número conhecido qualquer, sem exceção.
- A letra **x** representa a incógnita, ou seja, o número que torna a equação verdadeira.

Observe que é uma potência de expoente 2. Quando calculamos um valor para x, ele deixa de ser um valor desconhecido para se tornar uma *solução* ou *raiz* da equação.

Dizemos que **a** é o coeficiente de x^2 e **c** é o termo independente de x.

1. Escreva uma equação do 2° grau desse último tipo, em que o coeficiente de x^2 seja 9 e o termo independente de x seja 36.

---

2. Na equação $ax^2 - c = 0$, as letras **a** e **c** podem ser trocadas por quaisquer outras, desde que não seja a letra que representa a incógnita.

A letra **x** também pode ser trocada por qualquer outra, desde que não seja nenhuma das letras que representam os coeficientes.

As equações que estão na tabela são equações do 2° grau que podem ser expressas na forma $a \cdot x^2 - c = 0$.

Em cada uma delas, identifique a incógnita e os coeficientes **a** e **c**.

equação	incógnita	a	c
$-6y^2 - 7 = 0$			
$z^2 = \frac{3}{2}$			
$0{,}8\ t^2 = 0$			
$\sqrt{3}\ n^2 + 1 = 0$			

Equações do tipo $ax^2 - c = 0$

1. Para encontrar as soluções da equação $9x^2 - 36 = 0$, João experimentou alguns números. Verificou que -2 e 2 são soluções dessa equação, atribuindo esses valores a **x**. Veja:

Para $x = -2$ temos $9 \cdot (-2)^2 - 36 = 0$, como $9 \cdot 4 - 36 = 0$, temos $36 - 36 = 0$

Para $x = 2$ temos $9 \cdot 2^2 - 36 = 0$, como $9 \cdot 4 - 36 = 0$, temos $36 - 36 = 0$

Helena, por sua vez, pensou:

$9x^2 - 36 = 0$ é o mesmo que $9x^2 = 36$. Então, x^2 é o quociente da divisão de 36 por 9, ou seja, $x^2 = 36 \div 9 = 4$

Você acha que Helena obterá as mesmas soluções que João? Explique.

____

____

2. Uma forma de obter as soluções da equação genérica $a \cdot x^2 = c$ é escrever:

$x^2 = c \div a = \frac{c}{a}$

Observe a equação acima e responda:

a) Se $c = 0$, qual é o valor de x? Essa solução é única?

____

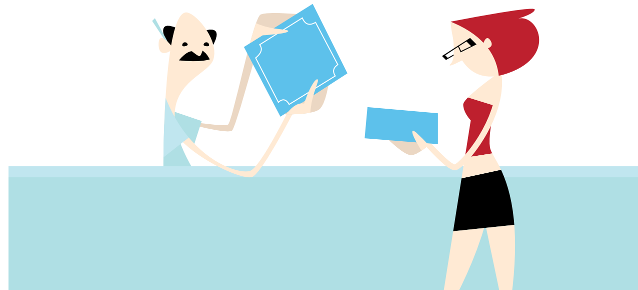
b) Se c é um número positivo e se indicarmos suas duas soluções por x_1 e x_2, como você pode escrevê-las?

____

c) Se $\frac{c}{a}$ é negativo, será que o símbolo $\sqrt{\frac{c}{a}}$ representa um número racional ou irracional?

____

Nesse caso, dizemos que a equação não tem solução, ou raiz, no conjunto dos números reais. Ou simplesmente que não tem raízes reais.



Placas e pisos

Em uma loja de material de construção, um vendedor mostrou à Maria dois tipos de placa para revestimento de pisos:

- um retangular cujo comprimento tinha 60 cm a mais que a largura;
- um quadrado cujos lados mediam o dobro da largura da placa retangular.

Sabendo-se que as duas placas têm áreas iguais, quais são as dimensões de cada uma?

Vamos ver se você entendeu o enunciado do problema.

1. Marque todas as informações que servem para resolver o problema:

- ☐ Maria foi a uma loja comprar placas para revestir pisos.
- ☐ O comprimento da placa retangular mede 60 cm a mais que a largura.
- ☐ A medida dos lados da placa de forma quadrada é o dobro da largura da placa retangular.
- ☐ A placa de forma quadrada é maior que a placa de forma retangular.
- ☐ As duas placas têm áreas iguais.

2. Marque a pergunta que você tem que responder:

- ☐ Quantas placas Maria precisa comprar?
- ☐ Quais as dimensões de cada placa?
- ☐ Qual é comprimento da placa retangular?
- ☐ Qual é a área de cada placa?
- ☐ Qual é a medida dos lados da placa quadrada?

Equacionando um problema

Vamos resolver o problema da página anterior por meio de uma equação.

1. Represente a largura da placa retangular pela letra **a** e preencha a tabela com expressões algébricas correspondentes a cada frase.

largura da placa retangular	**a**
comprimento da placa retangular	
área da placa retangular	
medida dos lados da placa quadrada	
área da placa quadrada	
as duas placas têm áreas iguais	

2. Faça as transformações a seguir na equação formulada na atividade anterior:

a) Aplique a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, no primeiro membro da equação.

____

b) Subtraia a^2 e $60 \cdot a$ dos dois membros da equação.

____

c) Efetue as operações indicadas.

____

d) Reduza os termos semelhantes.

____

A equação $3 \cdot a^2 - 60 \cdot a = 0$ é do 2° grau porque o maior expoente da incógnita **a** é 2.

Resolvendo uma equação

Com seu colega de dupla, pense sobre as atividades seguintes:

1. Descubra uma forma de resolver a equação $3 \cdot a^2 - 60 \cdot a = 0$. Registre seus procedimentos.

2. Observe como Maria resolveu essa equação:

$3a^2 - 60 \cdot a = a \cdot (3 \cdot a - 60) = 0$.

Explique o que ela fez.

3. Maria encontrou duas soluções: 0 e 20.

Elas estão corretas? Justifique sua resposta.

4. Analise o significado de cada solução para o problema proposto.

5. Quais são as dimensões das placas?

Resolução de $ax^2 + bx = 0$

Nas equações do 2° grau do tipo $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$, as letras **a** e **b** representam números conhecidos e são chamadas *coeficientes*.

Dizemos que **a** é o coeficiente de x^2 e **b** é o coeficiente de x.

1. Escreva uma equação do 2° grau desse tipo em que o coeficiente de x^2 seja 8 e o coeficiente de x seja − 15.

____

a) O que você precisa fazer para encontrar as soluções dessa equação?

____

____

e) Quais são as soluções que você encontrou?

____

____

2. Usando os mesmos procedimentos anteriores, escreva uma forma de obter as soluções da equação genérica $ax^2 + bx = 0$.

____

3. Compare a sua forma de resolver essa equação com a seguinte explicação:

- x é fator comum aos termos $a \cdot x^2$ e $b \cdot x$
- Então: $a \cdot x^2 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x + b) = 0$
- Portanto: $x = 0$ ou $a \cdot x + b = 0$

4. Se indicarmos as duas soluções por x_1 e x_2, como podemos escrevê-las?

____

____

Resolvendo problemas

1. a) Escreva uma equação que represente o problema: Qual é o número cujo triplo do quadrado é igual a 75?

f) Esse problema tem solução? Se sim, qual é a solução?

g) Qual é a solução adequada ao problema proposto? Justifique sua resposta.

2. Um professor de matemática propôs o seguinte desafio:

A área de um pátio é de 300 m^2. Se esse pátio tiver a forma de um quadrado, qual será a medida de seus lados?

No grupo de Marina, todos os alunos obtiveram respostas diferentes, registradas na tabela abaixo:

Carlos	Marina	Sofia	Tiago
$3\sqrt{10}$ m	17,32 m	$10\sqrt{3}$ m	$\sqrt{300}$ m

Alguém obteve a resposta correta? Se sim, quem? Por quê?

Agora, é com você

1. Um professor de matemática do 9º ano de uma escola pública municipal da cidade de São Paulo disse a seus alunos que a área exata de uma superfície limitada por um losango era de $2 \cdot \sqrt{5}$ cm^2 e que suas diagonais mediam $\sqrt{8}$ cm e $\sqrt{10}$ cm. Depois, pediu aos alunos que conferissem esses dados.

Daniela lembrou que se pode calcular a área de um losango assim:

$$\text{área} = \frac{\text{medida de uma diagonal} \times \text{medida da outra diagonal}}{2}$$

a) Verifique se a afirmação de Daniela está correta.

b) Desenhe o losango e calcule sua área usando outro recurso. (Lembre-se de que as diagonais de um losango são perpendiculares.)

2. (Prova da Cidade - 2008) Um procedimento correto para calcular $\sqrt{12} + \sqrt{45}$ é:

☐ a) $\sqrt{12} + \sqrt{45} = \sqrt{12 + 45} = \sqrt{57}$

☐ b) $\sqrt{12} + \sqrt{45} = \sqrt{12 \cdot 45} = \sqrt{540}$

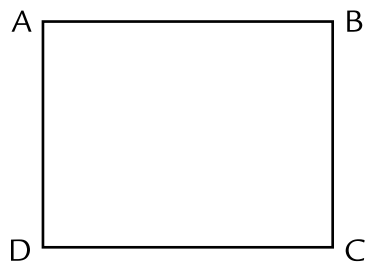
☐ c) $\sqrt{12} + \sqrt{45} = \sqrt{3 \cdot 4} + \sqrt{5 \cdot 9} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$

☐ d) $\sqrt{12} + \sqrt{45} = \sqrt{3 \cdot 4} + \sqrt{5 \cdot 9} = 4\sqrt{3} + 9\sqrt{5}$

3. (Prova da Cidade-2008) Sabe-se que o valor aproximado de $\sqrt{2}$ é 1,4 e de $\sqrt{3}$ é 1,7. Um valor aproximado para $\sqrt{6}$ é:

☐ a) 2,38 ☐ b) 3,10 ☐ c) 3,40 ☐ d) 4,20

4. No retângulo ABCD, sabe-se que DB = $\sqrt{800}$ cm, e AD = $\sqrt{300}$ cm.



Calcule:

a) a medida AB:

b) a área da superfície limitada pelo retângulo ABCD:

c) a área de uma circunferência de diâmetro DB:

Dê as respostas em valor exato e aproximado. Para os cálculos aproximados, utilize $\sqrt{2} \cong 1{,}41$; $\sqrt{3} \cong 1{,}73$; $\sqrt{5} \cong 2{,}24$ e $\pi \cong 3{,}14$.

UNIDADE 5

Nesta Unidade, tendo como cenário algumas contribuições culturais dos povos acolhidos por nossa cidade, você vai aprofundar seus estudos sobre equações de segundo grau e explorar ornamentos no plano, por meio de um tipo de transformação geométrica denominada isometria.

Você será convidado, também, a resolver situações-problema que abordam noções de estatística, como amostra de uma população e frequências.

MÁRIO ÂNGELO/FOLHAPRESS

Ensaio para a festa da imigração japonesa, em São Paulo.

DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Templo budista, bairro da Liberdade, em São Paulo.

EDUARDO KNAPP/FOLHAPRESS

Igreja Nossa Sra. Achiropita, no Bixiga, em São Paulo.

SAMIR BAPTISTA/FOLHAPRESS

Festa de Nossa Sra. Achiropita.

JORGE ARAÚJO/FOLHAPRESS

Feira de bolivianos, bairro do Pari, em São Paulo.

Há quem diga que o maior patrimônio da cidade de São Paulo é sua diversidade cultural.

A contribuição dos migrantes de várias regiões do Brasil e do mundo à cultura paulistana abrange aspectos arquitetônicos, artísticos, culturais e religiosos.

Converse com seus colegas sobre algumas manifestações culturais comemoradas em seu bairro que foram trazidas por grupos de migrantes.

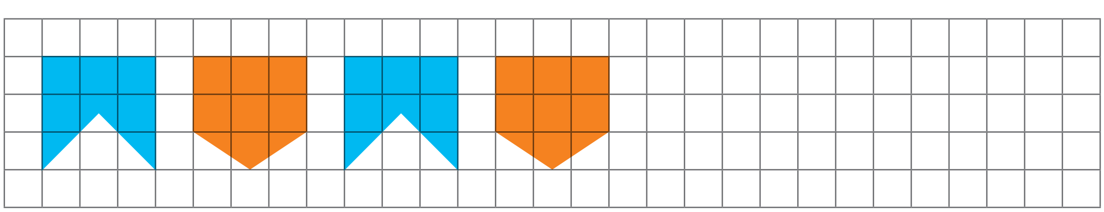
Festas de junho

Os nordestinos têm presença marcante na cidade de São Paulo. Sua forte cultura é inconfundível, por causa dos sotaques, das músicas e danças, das bebidas e comidas típicas.

Uma das maiores manifestações culturais do Nordeste são as festas juninas, que se espalharam por todo o país. As bandeirinhas de papel de seda colorido, símbolos dessas festas, decoram os locais onde elas acontecem, como centros esportivos, parques, praças e pátios de escolas.

MARCIO MAITAN

Observe a reprodução de um cordão de bandeirinhas:

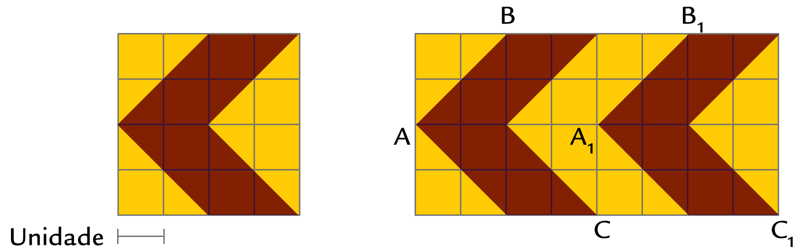


1. Complete a tira quadriculada seguindo o padrão das figuras anteriores.

2. Descreva um movimento que você conseguiu perceber na reprodução.

Rita e seu vestido de chita

Para ir a uma festa junina, Rita pensou em fazer um vestido de chita enfeitado com um barrado. Para ter ideia de como ficaria o barrado, ela começou desenhando uma figura e foi deslizando-a.



O ponto nomeado A_1 corresponde ao ponto A da figura original. O símbolo 1 colocado à direita da letra A é denominado índice.

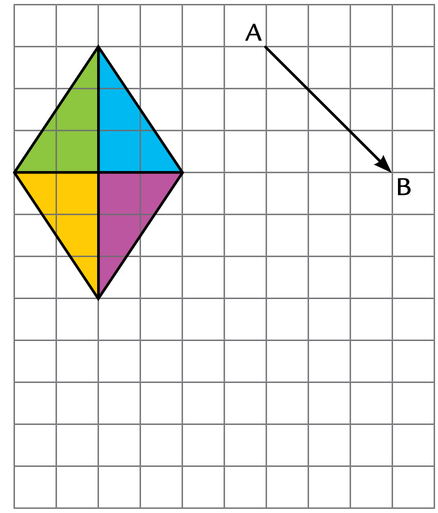
1. Em quantas unidades foi deslocado o ponto A para obter o ponto A_1, o ponto B para obter o ponto B_1 e o ponto C para obter o ponto C_1?

2. Qual é o sentido de deslocamento dos pontos A, B e C? Desenhe um segmento orientado MN indicando, com uma seta, a direção e o sentido do deslocamento dos pontos. A medida desse segmento deve ser igual à distância do deslocamento.

3. Trace, na segunda figura, os segmentos AA_1, BB_1, CC_1. Qual é sua conclusão sobre esses segmentos de reta?

4. Rita fez uma translação da figura inicial. Quando você faz a translação de uma figura F e a transforma em uma figura G, quais são suas conclusões sobre elas?

A translação de um balão



1. Na malha quadriculada ao lado está o desenho de um balão. Desenhe nela outro balão que seja sua translação, segundo o segmento orientado AB.

2. Observando o que você fez na atividade 1, explique quais foram os procedimentos usados para fazer a translação do balão.

____

____

____

3. Junte-se a um(a) colega e produzam um texto que explique como fazer a translação de uma figura.

____

____

____

4. Comparem o texto da atividade anterior com o texto a seguir e, se necessário, modifiquem o que vocês escreveram.

> A translação de uma figura F, segundo um segmento orientado MN, transforma a figura F em uma figura G tal que a todo ponto P da figura F corresponde o ponto P_1 da figura G. O segmento orientado PP_1 tem mesma direção, mesmo sentido e mesma medida do segmento MN.

Observe que, ao efetuar a translação da figura, você a transformou em uma figura congruente à original.

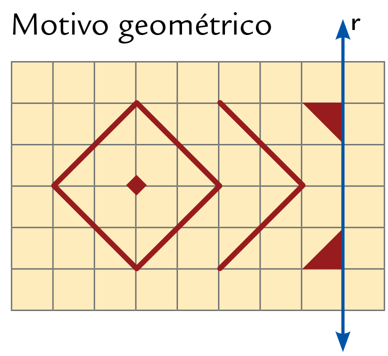
Guaranis paulistanos

São Paulo foi um dos Estados que mais sofreram influência do tupi-guarani, língua falada pelos bandeirantes. Ibirapuera, Anhangabaú, Pacaembu, Morumbi, Tietê: todos são nomes de origem indígena.

A aldeia Tenonde Porã, da etnia Guarani Mbya, é uma das quatro comunidades indígenas da capital paulista. O artesanato, além de ser uma fonte de recursos, é uma forma de preservar sua cultura.

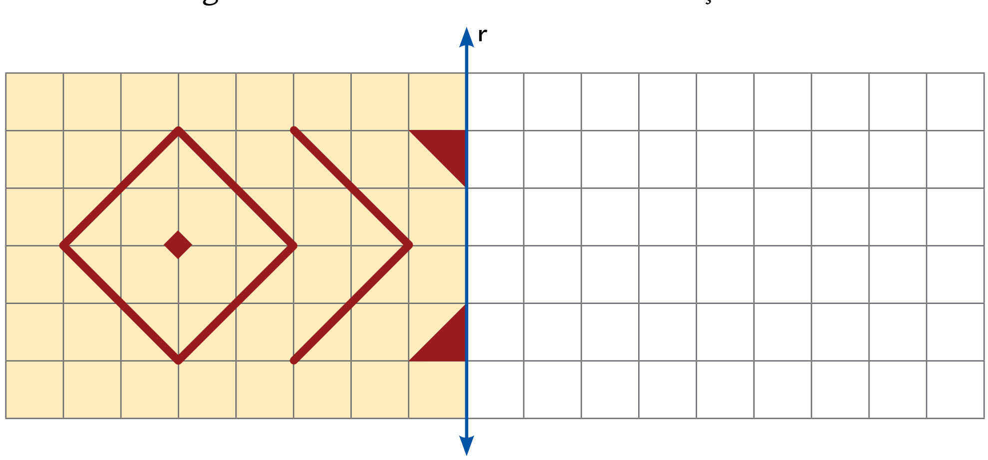
1. Na malha ao lado da foto está desenhado o motivo geométrico da cesta:

ACERVO AMOA KONOYA ARTE INDÍGENA



Cesto de taquara e cipó imbé.
Povo Guarani Mbya (Ubatuba – SP).

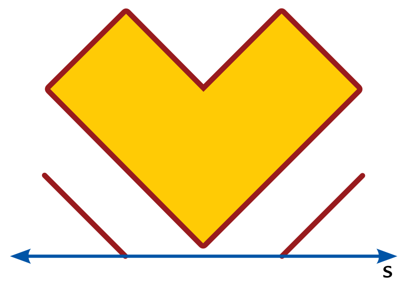
Obtenha uma figura simétrica a esse motivo em relação ao eixo **r**.



Como um espelho

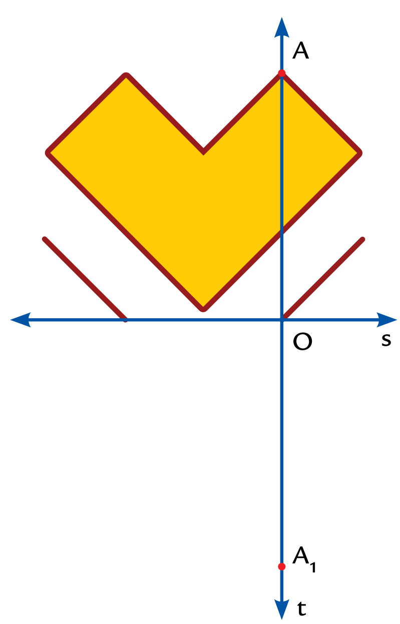
Ceci quer fazer um colar de miçangas.

Ela desenhou a figura seguinte com um motivo geométrico e uma reta **s** e pensou em desenhar uma figura simétrica a esse motivo por meio de reflexão em relação a **s**.



Acompanhe os procedimentos de Ceci para completar o desenho e responder às questões.

Ela marcou um ponto A sobre a figura. Em seguida traçou a reta **t** passando pelo ponto A e perpendicular à reta **s**.



1. Em que ponto a reta **t** cruza a reta **s**?

Ceci marcou sobre a reta **t** o ponto A_1. A distância dele à reta **s** é igual à distância do ponto A ao ponto O. O ponto A_1 é denominado ponto simétrico do ponto A em relação à reta **s**.

2. Marque o ponto B sobre o motivo geométrico. Repita para o ponto B todas as ações descritas para o ponto A e determine o ponto B_1, simétrico ao ponto B em relação à reta **s**.

3. Marque os pontos C, D e E sobre a figura original e repita os procedimentos executados para os pontos A e B. Realizando essas ações para determinados pontos da figura original, obteremos uma reprodução dela, como se fosse sua imagem em um espelho. Essa nova figura é simétrica à original em relação à reta **s**. A reta **s** é denominada eixo de simetria.

Observe a figura da página anterior. Você fez uma reflexão da figura original em relação à reta **s**.

Uma reflexão de uma figura F, em relação a uma reta **s**, transforma F em uma figura G tal que a cada ponto A da figura original corresponde o ponto A_1 da figura G, de modo que:

a) a reta AA_1 é perpendicular à reta **s**;

b) A e A_1 estão à mesma distância da reta **r**.

Na reflexão de uma figura, a imagem é congruente à figura original.

Pulseira de miçangas e algodão. Povo Tapirapé (Mato Grosso).

ACERVO AMOA KONOYA ARTE INDÍGENA

Azulejos: herança de vários povos

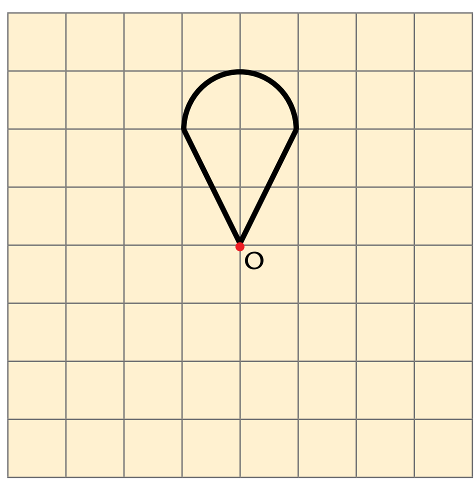
Uma forte inspiração da arte árabe em nossa cultura pode ser vista nas tapeçarias, nos azulejos e no revestimento de pisos, de variadas cores e formas.

Coube aos espanhóis o mérito de usar azulejos como veículo de expressão ornamental e divulgá-los no Ocidente.

Dos portugueses herdamos o gosto de embelezar com azulejos casas, ruas, praças, monumentos, igrejas, palácios.

RICARDO AZOURY/PULSAR IMAGENS

1. Coloque um pedaço de papel sobre o motivo geométrico a seguir, copie-o e recorte-o.

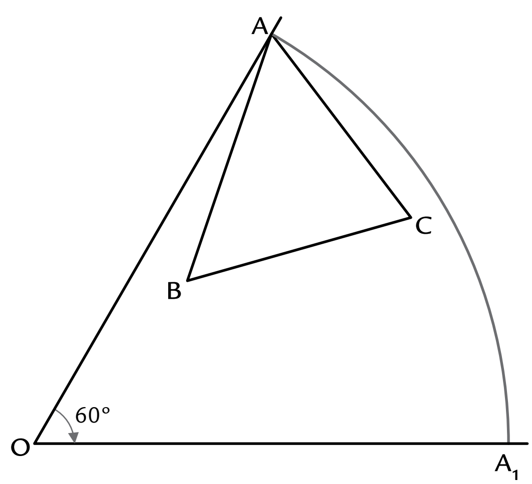


2. Sobreponha a figura recortada (molde) sobre o motivo original e faça um giro de 90° no molde, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio (sentido horário), em torno do ponto O.
Em seguida, desenhe a nova figura na malha, contornando o molde.
Compare as duas figuras e registre suas conclusões sobre o fato.

A rotação de um triângulo

Observe como Jorge começou a realizar uma rotação de 60° do triângulo, no sentido horário, em torno do ponto O:

- Ele marcou no triângulo três pontos: A, B e C.
- Em seguida, com um transferidor, traçou um ângulo de 60°, com vértice O e um dos lados o segmento OA.
- Com a ponta de um compasso no centro O, ele traçou um arco de circunferência que cruzou o outro lado do ângulo no ponto A_1. O ponto A_1 é o ponto correspondente ao ponto A, nessa rotação.



1. Repita para os pontos B e C o que foi feito com o ponto A e desenhe a figura G, que é a imagem da figura F.

2. Junte-se a um colega e, observando o que vocês fizeram na atividade 1, produzam um texto que explique como fazer a rotação de uma figura.

3. Comparem o texto da atividade anterior com o texto a seguir e, se necessário, modifiquem o que vocês escreveram.

Uma rotação de uma figura em um plano consiste em girá-la, em determinado ângulo e sentido, em torno de um ponto dado chamado centro de rotação.

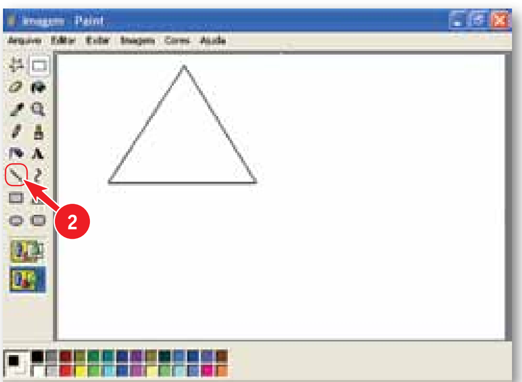
Observe que, ao efetuar a rotação de uma figura, esta é transformada em outra congruente à original.

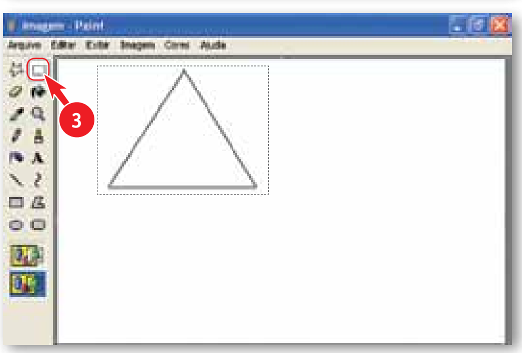
As três transformações que acabamos de estudar – translação, simetria e rotação – são isometrias, pois, em cada caso, a figura transformada tem as mesmas medidas da original.

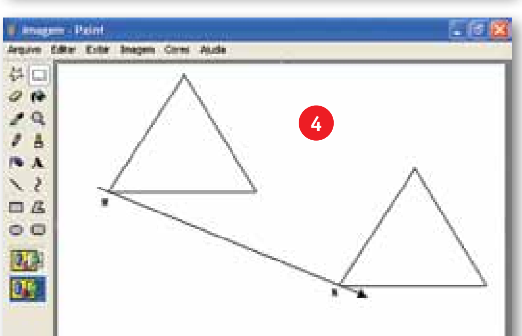
Translações no computador

Existem alguns programas de computador que permitem ao usuário desenhar vários tipos de figuras (polígonos, círculos, figuras livres) e realizar algumas ações com elas, como translações, simetrias e rotações.

Um desses programas se chama Paint, encontrado no sistema Windows.







1. Acesse o Paint por meio da sequência: **Iniciar**, **Programas**, **Acessórios** e **Paint**.

2. Com o Paint na tela, desenhe, por exemplo, um triângulo, usando a opção **linha** (que serve para desenhar retas) na barra de ferramentas.

3. Para guardar esse triângulo na memória do computador:

a) clique na opção **selecionar** na barra de ferramentas;

b) com essa ferramenta ativada, envolva, com o mouse, o triângulo com a moldura pontilhada e pressione, ao mesmo tempo, as teclas Ctrl e C para "memorizá-lo";

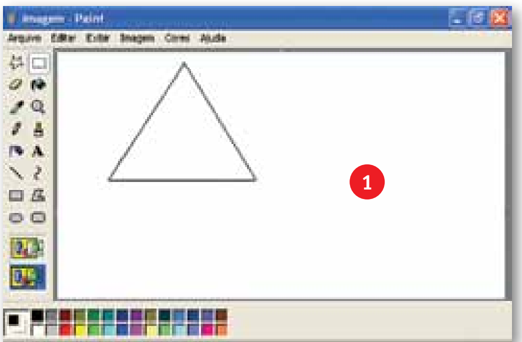
c) para recuperar a cópia do triângulo, pressione, ao mesmo tempo, as teclas Ctrl e V .

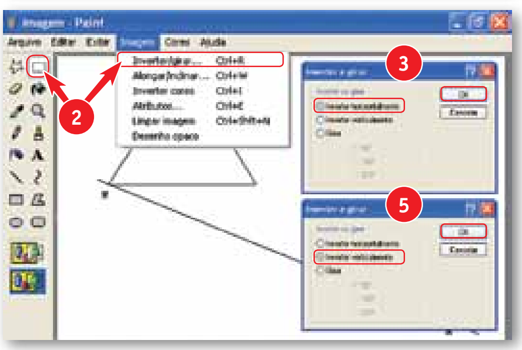
4. Usando o ponteiro do *mouse*, você pode deslocar a cópia do triângulo ao clicar sobre ele e manter o botão esquerdo do *mouse* pressionado, para uma translação do triângulo original. Para isso, desenhe um segmento orientado horizontal MN, que indicará a direção e o sentido da translação e, também, a distância do deslocamento.

5. Desenhe outra figura no Paint e um segmento orientado horizontal AB, que indicará a direção e o sentido da translação e, também, a distância do deslocamento. Peça a um colega que faça uma translação dessa figura.

Simetrias e rotações no computador

Ainda no programa Paint, deixe a ferramenta **modo transparência** acionada.





1. Com o triângulo original na tela (construído na página 143), faça uma cópia dele. Coloque-a sobre o triângulo de modo que eles coincidam.

2. Com a ferramenta **selecionar**, selecione a cópia do triângulo. Clique no menu **Imagem** e a opção **Inverter/girar** para exibir a janela ao lado.

3. Clique em **Inverter horizontalmente** e OK.

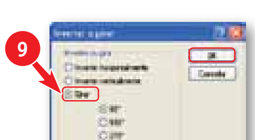
4. Qual é sua conclusão sobre essa operação?

5. Na configuração inicial (o triângulo original e sua cópia), selecione a cópia e clique em **Inverter verticalmente**.

6. O que você conclui sobre essa sequência de ações?

7. Coloque na tela uma cópia do triângulo que você "memorizou" e selecione-a.

8. De novo, selecione no menu **Imagem** e escolha a opção **Inverter/girar** para exibir a mesma janela anterior.



9. Em **Girar**, você terá três opções: 90°, 180° e 270°. Clique em cada uma delas e veja o que acontece.

10. Registre suas conclusões.

Hip-hop

Entre as muitas manifestações culturais brasileiras, como congado, maracatu, capoeira e samba, o movimento *hip-hop* tem cada vez mais atraído os jovens.

O *hip-hop* é formado por três elementos: o *rap* (música), o *break* (dança) e o grafite (desenho).


BRUNO MIRANDA/FOLHAPRESS


EGBERTO NOGUEIRA/FOLHAPRESS


CAROL GUEDES/FOLHAPRESS

1. O *rapper* Mano Miro é um sucesso. Em um evento de que participou, havia tanta gente na quadra que ele improvisou o seguinte *rap*:

> NÃO CABE MAIS NINGUÉM!
> AQUI ESTÁ BOMBANDO!
> CEM, DUZENTOS? É MAIS ALÉM!
> QUANTOS?
> DE TUDO QUE É PERFIL.
> SE VOCÊ ENTRAR, O QUADRADO DO NÚMERO
> DE GENTE CHEGA A 10.000.

Quantas pessoas havia na quadra, segundo Mano Miro?
Responda calculando mentalmente.

2. A equação que traduz o problema da página anterior é do tipo:

$$(n + 1)^2 = 10.000$$

Essa equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$n^2 + 2 \cdot n - 9.999 = 0$$

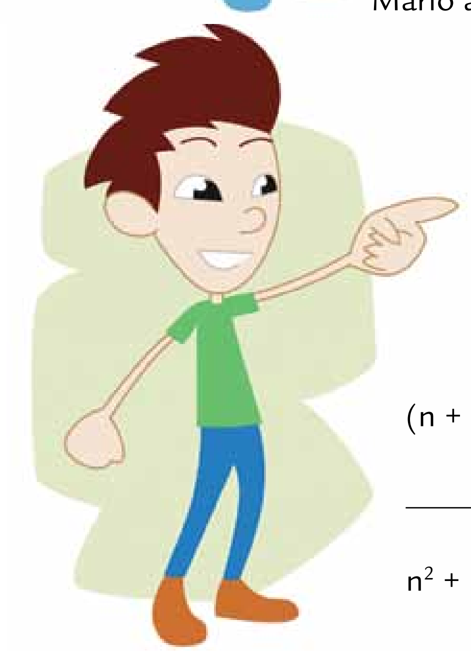
Observe como três estudantes pensaram para justificar a última afirmação. Use os procedimentos de cada um preenchendo os espaços em branco a seguir.

$(n + 1)^2$ é o quadrado de uma soma de dois termos. Então, posso usar a regra: o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

$(n + 1)^2 =$ ______________________________ $= 10.000$

______________________________ $- 10.000 = 0$

$n^2 + 2 \cdot n - 9.999 = 0$



Mário aplicou o algoritmo da multiplicação.

$$\begin{array}{lccc} & n & + & 1 \\ & n & + & 1 \\ \hline & & & \\ + & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

$(n + 1)^2 =$ ______________________________ $= 10.000$

______________________________ $- 10.000 = 0$

$n^2 + 2 \cdot n - 9.999 = 0$

Marcelo pensou em aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

$(n + 1)^2 = (n + 1) \cdot (n + 1) =$ ______________________________ $= 10.000$

______________________________ $- 10.000 = 0$

$n^2 + 2 \cdot n - 9.999 = 0$

Quais justificativas estão corretas? ______________________________

A equação $n^2 + 2n - 9.999 = 0$ é de segundo grau com incógnita **n**, porque o maior expoente da incógnita **n**, com coeficiente diferente de zero, é 2.

Ela é uma equação completa do tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, na qual o coeficiente de n^2 é 1, coeficiente de **n** é 2 e o termo independente é –9.999.

3. Essa equação possui soluções? Em caso positivo, quais são elas? Mostre como você pensou para encontrá-las.

____

____

4. Compare seu procedimento com os seguintes:

A forma inicial de $n^2 + 2n - 9.999 = 0$ é $(n + 1)^2 = 10.000$.

Se $(n + 1)^2 = 10.000$, então: $n + 1 = \sqrt{10.000} = 100$ ou

$n + 1 = -\sqrt{10.000} = -100$

a) Quais são as soluções da equação $n^2 + 2n - 9.999 = 0$?

____

____

b) Qual dessas soluções é adequada ao problema proposto? Justifique sua resposta.

____

____

Soluções e seus significados

Em alguns casos, podemos resolver equações de segundo grau completas usando fatoração.

Veja as soluções genéricas das equações do tipo:

$$(m \cdot x + n)^2 = c.$$

1. Qual é o valor “proibido” para o coeficiente **m**? Por quê?

____

____

2. Se o número **c** é positivo, uma forma para encontrar as soluções é a seguinte:

> Se $(m \cdot x + n)^2 = c$, então $m \cdot x + n = \sqrt{c}$, ou $m \cdot x + n = -\sqrt{c}$, que são duas equações de primeiro grau.

Se você representar as soluções dessas equações por x_1 e x_2, que resultados vai obter?

____

3. Se c = 0, a equação tem solução? Justifique sua resposta.

____

____

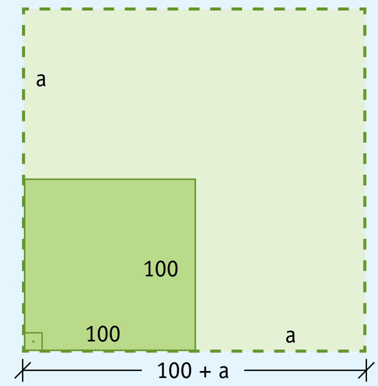
____

> Se o número c é negativo, não representa um número racional ou um número irracional. Dizemos, então, que a equação $(m \cdot x + n)^2 = c$ não tem solução racional nem irracional.

O aumento da quadra

O terreno onde fica a quadra na qual Mano Miro se apresentou tem a forma quadrada cujos lados medem 100 m.

Como a quadra está ficando pequena, para aumentá-la, os diretores do clube procuraram o dono do terreno. Este, que tem a intenção de vendê-lo, fez a seguinte proposta: um novo lote que contém o lote anterior, de forma quadrada e cuja área é o quádruplo do outro lote. Nessas condições, o dono do terreno dará um desconto de 10% com relação ao preço por metro quadrado anterior.



a = aumento do tamanho de cada lado do terreno original (medidas em metros)

Qual deve ser o aumento no tamanho dos lados da quadra para que a área do novo terreno tenha o quádruplo da área da quadra?

Ao ler o enunciado de um problema, é preciso entender todas as informações que ele contém.

1. Procure no dicionário os diversos sentidos das palavras que por acaso você não conheça.

____

____

2. Reescreva o texto do problema com suas palavras.

____

____

____

____

Informações organizadas

Para encontrar as soluções de um problema, é conveniente identificar todas as informações contidas no texto.

1. No problema da página anterior, verifique se há informações suficientes, informações sobrando ou faltando para resolvê-lo. Em seguida:

a) Selecione as informações úteis.

b) Qual é a pergunta do problema?

c) O que você precisa saber para responder à questão proposta?

d) Esse problema se parece com algum que você já fez? Em quê?

e) Escreva um plano para resolver a situação-problema proposta.

2. Agora, execute seu plano e resolva o problema registrando seus cálculos.

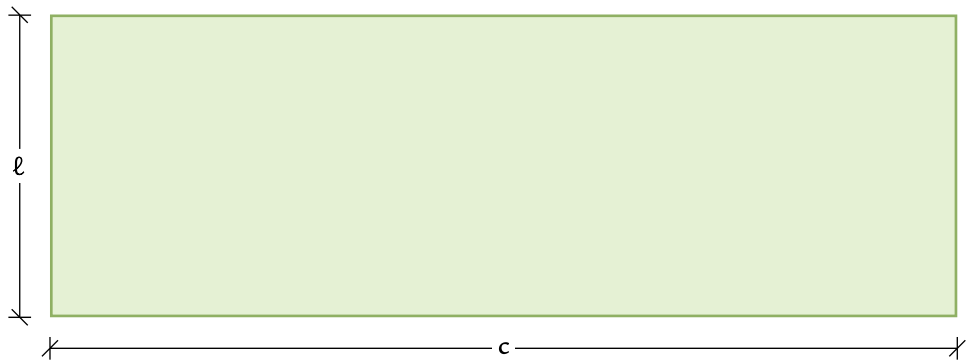
Resposta: O aumento no tamanho dos lados da quadra deve ser de:

3. Se você equacionou o problema, verifique se a equação obtida é do tipo $(m \cdot x + n)^2 = c$. Em caso afirmativo, quais são as soluções da equação?

4. Qual é a solução adequada ao problema proposto? Justifique sua resposta.

Um problema e suas soluções

1. Um terreno de forma retangular tem área de 300 m².



Qual é sua largura (a frente do terreno), sabendo que o comprimento tem 20 metros a mais que a largura?

a) Representando a largura por ℓ, escreva uma equação que seja uma tradução desse problema.

___

b) A equação é de segundo grau? É completa? Justifique sua resposta.

___

___

2. Essa equação pode ser transformada em outra do tipo:

$$(m \cdot x + n)^2 = c$$

Observe:

Duas vezes o primeiro termo pelo segundo termo.

$$\ell^2 + 20 \cdot \ell = 300 \text{ ou } \ell^2 + 2 \cdot \ell \cdot 10 = 300$$

Adicionando 10^2 (quadrado do segundo termo) aos dois membros da equação, temos uma equação equivalente à primeira:

$$\underbrace{\ell^2 + 2 \cdot 10 \cdot \ell + 10^2}_{(\ell + 10)^2} = 300 + 10^2 = 300 + 100 = 400$$

Use o procedimento estudado nas páginas 146 e 147 e determine as soluções da equação $\ell^2 + 20 \cdot \ell = 300$.

3. Existe alguma solução adequada ao problema proposto? Justifique sua resposta.

Resolução e fórmula

Uma equação de segundo grau completa tem a seguinte forma genérica:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

na qual as letras **a**, **b** e **c** representam números conhecidos quaisquer, todos não nulos, e **x** é a incógnita.

Atribui-se ao matemático indiano Bhaskara o desenvolvimento de uma fórmula, conhecida como fórmula de Bhaskara, para calcular as soluções das equações desse tipo.

1. Pesquise nos livros didáticos disponíveis qual é essa fórmula e reescreva-a no espaço abaixo.

Fórmula de Bhaskara:

2. Retome a equação $\ell^2 + 20 \cdot \ell - 300 = 0$ desenvolvida na página anterior e identifique seus coeficientes.

3. Determine as soluções dessa equação aplicando a fórmula de Bhaskara.

4. Verifique se os valores que você obteve como soluções tornam a equação $\ell^2 + 20 \cdot \ell - 300 = 0$ uma sentença matemática verdadeira.

Raiz ou solução de uma equação de segundo grau com uma incógnita é o valor que, atribuído à incógnita, torna a equação uma sentença matemática verdadeira.

5. Por causa de sua importância, o número $\mathbf{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$ é chamado discriminante da equação e indicado pelo símbolo Δ**,** que é a letra grega delta maiúscula, correspondente à letra latina D.

a) Qual é o discriminante da equação $\ell^2 + 20 \cdot \ell - 300 = 0$?

____

b) Δ é um número positivo, nulo ou negativo?

____

c) Quantas soluções possui essa equação?

____

d) Qual é a relação entre o valor do discriminante e o número de soluções dessa equação?

____

____

Aplicação da fórmula de Bhaskara

Use a fórmula de Bhaskara para resolver a equação

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

1. Destaque os valores dos coeficientes:

---

2. a) Calcule o valor da expressão $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, atribuindo a **a**, **b** e **c** os valores destacados na atividade anterior. Mostre como você fez os cálculos.

b) Δ é um número positivo, nulo ou negativo?

---

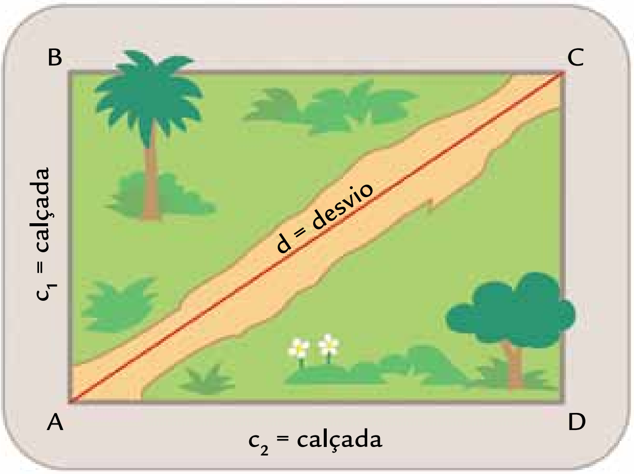
3. Encontre as soluções, calculando $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

4. Na equação $2x^2 + 3x - 2 = 0$, atribua a **x** os valores que você encontrou como resposta na atividade 3 e verifique se eles são soluções dessa equação.

Caminhos mais curtos

Já é bem conhecida a tendência das pessoas de "encurtar" um caminho em um espaço aberto, quando possível.

Em um jardim público, que tem a forma de um retângulo, os usuários "construíram" um caminho (desvio) por sua diagonal.



- O desvio tem 20 metros a mais que a menor calçada.
- A maior calçada tem 10 metros a mais que a menor calçada.
- Quais são os comprimentos do desvio e das calçadas?

Diversidade cultural

> Em nossas sociedades cada vez mais diversificadas, torna-se indispensável garantir uma interação harmoniosa entre pessoas e grupos com identidades culturais a um só tempo plurais, variadas e dinâmicas, assim como sua vontade de conviver.
>
> Unesco. Declaração Universal sobre a Diversidade Cultural, artigo 2.

A diversidade cultural é o resultado de muitos anos de contribuição de todos os povos por meio de sua língua, história, tecnologias, práticas e crenças.

1. Para determinar o perfil sociocultural dos alunos de uma escola municipal, a diretora escolheu aleatoriamente uma amostra formada por 50 estudantes de uma população de 800 matriculados.

Nessas condições, ela vai realizar um experimento.

- O conjunto de 800 estudantes da escola será nomeado de população do experimento.

Como nem sempre é possível observar a população toda, escolhemos uma parte dela, que chamamos **amostra** e que a representa como um todo.

Nesse experimento, a **amostra** corresponde ao grupo de 50 alunos escolhidos.

Existem técnicas especiais para selecionar amostras convenientes e que estejam de acordo com os objetivos de uma pesquisa. Chamamos essas técnicas de **amostragem**.

Explique o que entendeu por população e amostra.

2. Por que, em algumas pesquisas, uma amostra é utilizada para representar uma população?

3. As expressões "aleatória" e "ao acaso" serão consideradas sinônimas. Existem muitas formas para a escolha aleatória dos componentes de uma amostra. Veja algumas que poderiam ser utilizadas no experimento da escola municipal:

- Confeccionar 800 cartões numerados de 1 a 800, correspondentes aos estudantes matriculados, colocá-los em uma caixa e realizar 50 sorteios.
- Confeccionar uma lista de todas as turmas da escola e realizar o sorteio de um estudante de cada turma, sucessivamente, até completar a amostra de 50.

Como você selecionaria uma amostra aleatoriamente?

A pesquisa na escola

1. Feita a escolha da amostra (que se espera seja representativa da população), a diretora da escola municipal deve organizar um material escrito com perguntas e informações sobre as condições sociais e culturais dos estudantes dessa amostra.

Veja dois exemplos elaborados pela equipe da escola.

a) Qual o Estado ou país de origem de:

sua mãe: ____

seu pai: ____

b) A faixa salarial mensal de sua família é:

- ☐ até dois salários mínimos.
- ☐ mais de dois salários mínimos até quatro.
- ☐ mais de quatro salários mínimos até seis.
- ☐ mais de seis salários mínimos.
- ☐ Não respondeu.

Elabore algumas perguntas que poderão ser feitas aos entrevistados e que tratam do assunto da pesquisa.

____

____

2. A diretora da escola municipal distribuiu aos estudantes da amostra um questionário com perguntas sobre as condições sociais e culturais da família. Depois de receber os questionários respondidos, ela fez um trabalho de levantamento e tabulação de dados.

O que você entende por tabulação?

____

3. Veja, a seguir, parte da pesquisa da escola municipal sobre o Estado ou país de origem da mãe, colocada na forma de tabela. Cada valor numérico que ocorre:

- na segunda coluna da tabela, é chamado frequência (ou frequência absoluta);
- na terceira coluna, é chamado frequência relativa. É o valor da razão entre a frequência absoluta e a frequência total (número de elementos da amostra).

Utilize uma calculadora e complete a coluna de frequências relativas desta tabela:

Estado ou país de origem da mãe	Número de estudantes ou frequência	Frequência relativa
São Paulo	10	$10 \div 50 = 0{,}2 = 20\%$
Bahia	12	$12 \div 50 = 0{,}24 = 24\%$
Minas Gerais	6	
Paraná	7	
Coreia	4	
Bolívia	7	
Não respondeu	4	
Total	50	

4. Se a amostra que a diretora selecionou aleatoriamente for significativa para a população da escola, o que você pode concluir a respeito da origem natal das mães dos alunos dessa escola?

____

____

____

Análise de frequências

1. Observe, na tabela abaixo, uma pesquisa em uma escola sobre a faixa salarial familiar dos alunos.

Faixa salarial familiar	até 2 salários	mais de 2 salários até 4 salários	mais de 4 salários até 6 salários	mais que 6 salários	não respondeu
Frequência	16	19	23	12	10
Frequência relativa					

a) Complete a tabela preenchendo a coluna referente à frequência relativa.

b) Leia cada conclusão a seguir e indique se está correta ou incorreta. Justifique suas respostas.

- Cerca de 60% das famílias dos estudantes têm renda maior do que quatro salários mínimos.

- Aproximadamente 53% das famílias dos estudantes dessa escola têm renda maior do que dois salários mínimos até seis.

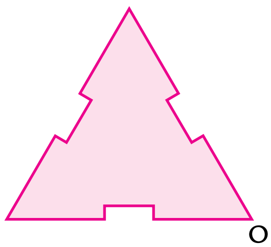
- Entre as famílias dos estudantes dessa escola, apenas 12,5% vivem com menos de dois salários mínimos.

Agora, é com você

1. Ao redor do ponto O, faça rotações da figura abaixo:

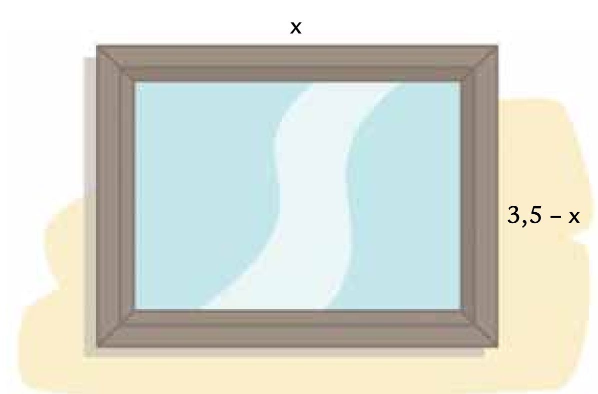
a) de 60° no sentido horário. Não pinte a figura final.

b) de 120° no sentido horário. Pinte a figura final com a mesma cor da original.



2. Marcos quer fazer uma moldura para um espelho retangular com 3 m² de área usando uma ripa de 7 m.

a) Veja o desenho que ele fez para saber o comprimento de cada pedaço.



Marcos representou as dimensões da moldura por **x** e 3,5 − x. Você concorda com essa representação? Justifique sua resposta.

____

____

b) Qual é o comprimento de cada pedaço?

____

Nas questões seguintes, assinale a alternativa correta.

3. A diferença entre o quadrado de um número e seu dobro é 35. Esse número pode ser:

☐ 5 e 7

☐ −5 e 7

☐ −7 e 5

☐ −5 e −7

4. As raízes das equações de segundo grau do tipo $ax^2 - c = 0$, com $a \neq 0$ e $c > 0$, são:

☐ $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ e $\sqrt{\frac{c}{a}}$

☐ $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ e $\sqrt{\frac{a}{c}}$

☐ $-\sqrt{\frac{a}{c}}$ e $\sqrt{\frac{a}{c}}$

☐ $\sqrt{\frac{a}{c}}$ e $\sqrt{\frac{c}{a}}$

5. (Prova da Cidade, 2009). O triplo do quadrado de um número mais o dobro desse número é igual a 16. Qual é o número?

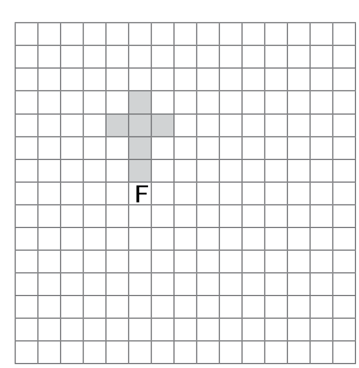
☐ 2

☐ 1

☐ −1

☐ −2

6. (Prova da Cidade, 2009) Juliana vai bordar uma toalha em ponto de cruz e usará a malha abaixo para fazer o desenho que vai no bordado, conforme a figura ao lado. Complete na malha os pontos de cruz que correspondem a uma rotação de 90° no sentido horário em relação ao ponto F da figura sombreada de cinza.



UNIDADE 6

Nesta Unidade, por meio de situações ligadas a certos profissionais, você vai analisar problemas que envolvem o cálculo da área total de prismas e pirâmides, problemas que abrangem noções e cálculos de média aritmética e de moda e problemas que utilizam a noção de congruência de figuras planas.

Também estudará procedimentos que permitem localizar alguns números irracionais na reta numérica.


IMAGE SOURCE/FOLHAPRESS


IMAGE SOURCE/FOLHAPRESS


IMAGE SOURCE/FOLHAPRESS


IMAGE SOURCE/FOLHAPRESS

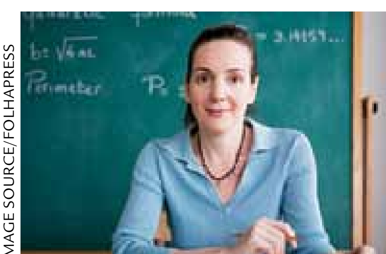


IMAGE SOURCE/FOLHAPRESS

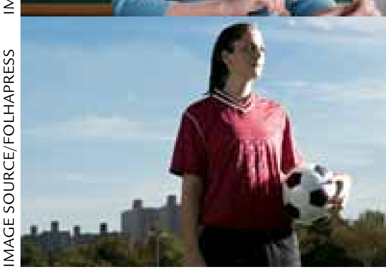


IMAGE SOURCE/FOLHAPRESS

Com os avanços tecnológicos, está ficando cada vez mais difícil tomar uma decisão sobre que carreira seguir. Profissões desaparecem com muita rapidez, enquanto outras surgem na mesma velocidade.

Alguns aspectos, como os econômicos e culturais, podem ajudar a escolher uma profissão, mas antes é preciso conhecer-se bem.

- **Quais são seus pontos fortes? E seus interesses?**

Lembre-se: nenhuma escolha é definitiva, pois novos caminhos podem surgir no percurso da vida.

Áreas e alguns usos

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Os sólidos geométricos são utilizados em diversas situações, entre elas a fabricação de embalagens. Como a embalagem pode ser um item caro na formação final do preço de um produto, existem profissionais que se dedicam ao cálculo da quantidade de materiais com alguns objetivos, como funcionalidade, resistência, aparência e custos mais baixos.

Outra aplicação é na pintura de prédios, residências, obras arquitetônicas.

1. Para pintar um prédio são necessárias 52 latas de tinta de 18 litros. Como foi calculada a quantidade de material para pintar esse prédio?

2. É possível recortar uma folha de papel sulfite do tipo A4, que mede 21 cm por 29,7 cm, em seis quadrados, de maneira que se construa um cubo com a maior aresta possível? Como?

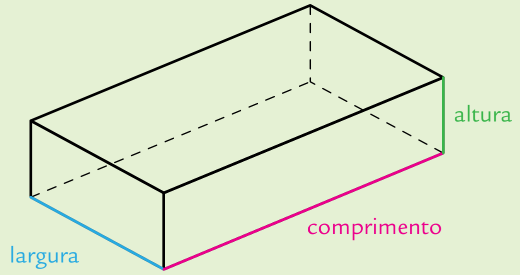
Matemática dos pintores

Cubos fazem parte de uma classe mais ampla de sólidos, a dos blocos retangulares, também chamados de paralelepípedos retorretângulos.

LUANA FISCHER/FOLHAPRESS

1. Quantas faces possui um bloco retangular? ______________________

2. A figura abaixo representa um armazém cujas dimensões são: 20 m de largura, 40 m de comprimento e 10 m de altura.



O dono quer pintar o armazém por dentro e por fora. Cada parede interna e externa será pintada duas vezes (primeira e segunda mãos). O teto será pintado apenas internamente, também duas vezes, desconsiderando portas e janelas.

Os pintores que vão realizar esse serviço possuem as seguintes informações sobre os rendimentos dos tipos de tinta:

- Primeira mão da pintura externa: cada lata com 18 litros de tinta pode ser suficiente para pintar cerca de 500 m^2 de superfície.
- Segunda mão da pintura externa: cada lata com 18 litros de tinta pode ser suficiente para pintar cerca de 1.000 m^2 de superfície.
- Primeira mão da pintura interna: cada lata com 18 litros de tinta pode ser suficiente para pintar cerca de 1.000 m^2 de superfície.
- Segunda mão da pintura interna: cada lata com 18 litros de tinta pode ser suficiente para pintar cerca de 2.000 m^2 de superfície.

Como esses pintores podem calcular a quantidade de latas com 18 litros de tinta para realizar esse trabalho, sabendo que, por segurança, deverão ser comprados 10% a mais de tinta do que o cálculo exato?

Analise os procedimentos e assinale os que são adequados para resolver o problema.

☐ a) Calcular as áreas das paredes, do teto e do piso desse armazém.

☐ b) Calcular as áreas das paredes e do teto desse armazém.

☐ c) Calcular 10% do total de tinta que seria necessária para pintar o armazém e a correspondente quantidade de latas de tinta com 18 litros.

☐ d) Calcular o gasto com essa quantidade de latas de tinta.

☐ e) Calcular, para cada mão de tinta, a quantidade de latas para a pintura interna e para a pintura externa.

O problema dos pintores

1. No problema da página anterior, determine se há informações necessárias ou suficientes, informações sobrando ou faltando para resolvê-lo.

2. O que é pedido no problema?

3. Quais os procedimentos que você escolheu para resolver o problema? Em que ordem?

4. Resolva o problema registrando seus cálculos e escrevendo a resposta completa.

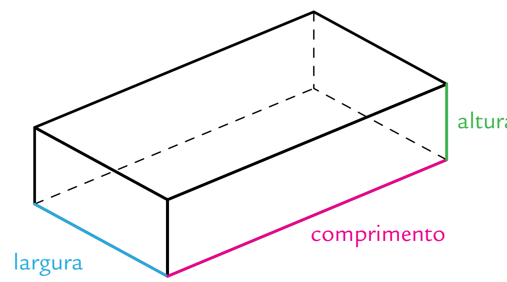
A área total de um bloco retangular

1. Representando a medida da largura do bloco abaixo por **ℓ**, a medida de seu comprimento por **c** e a medida de sua altura por **a**, quantas faces possuem dimensões com medidas:

a) **ℓ** e **c**? ____________________

b) **a** e **c**? ____________________

c) **a** e **ℓ**? ____________________



2. Quais são as áreas dos três tipos de faces?

____

3. Qual é a soma das áreas de todas as faces desse paralelepípedo?

____

A soma das áreas dessas seis faces denomina-se **área total da superfície do bloco retangular**.

4. Escreva uma fórmula para determinar a área total da superfície de um bloco retangular qualquer.

____

5. Compare sua resposta com a fórmula a seguir e, se necessário, modifique o que você escreveu.

A área total da superfície de um bloco retangular pode ser obtida pela fórmula:

Área total = $2 \cdot \ell \cdot c + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot a \cdot \ell = 2 \cdot (\ell \cdot c + a \cdot c + a \cdot \ell)$

6. Se $\ell = c = a$, o que ocorre com a fórmula acima? Para que tipo de sólido essa fórmula se aplica?

____

O cálculo dos gastos

A figura abaixo representa uma sala cujas dimensões são: 5 metros de largura, 10 metros de comprimento e 3 metros de altura. Cada parede e o teto dessa sala serão pintados duas vezes (primeira e segunda mãos).

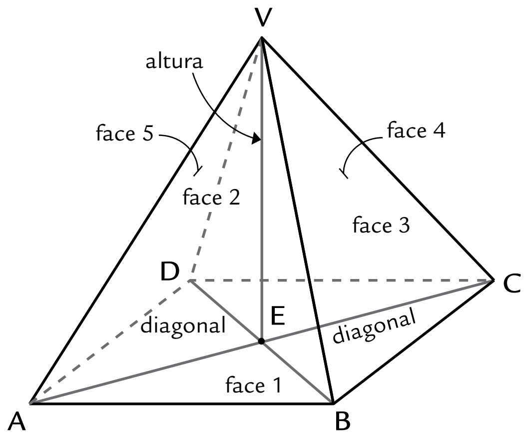
O pintor que realizará o serviço possui as seguintes informações sobre os rendimentos da tinta a ser utilizada:

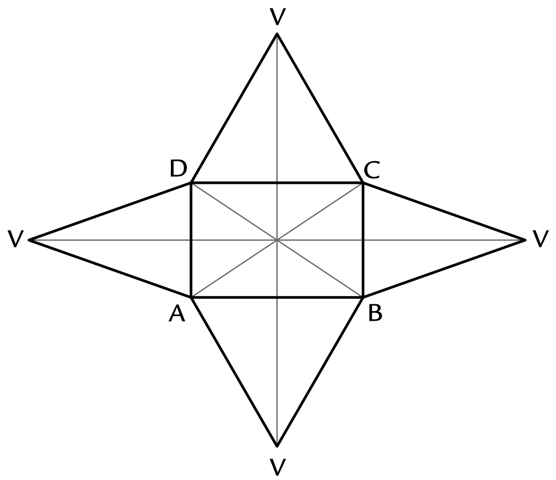
- Primeira mão da pintura: cada galão de tinta (1 galão corresponde a 3,5 litros) é suficiente para pintar cerca de 90 m^2 de parede e cada lata com 18 litros de tinta é suficiente para pintar em torno de 463 m^2 de parede.
- Segunda mão da pintura: cada galão de tinta é suficiente para pintar cerca de 120 m^2 de parede e cada lata com 18 litros de tinta é suficiente para pintar em torno de 617 m^2 de parede.

O preço de um galão de tinta é R$ 35,00 e o de cada lata com 18 litros é R$ 120,00. Nessas condições, qual é a opção mais econômica para a pintura dessa sala, desconsiderando porta e janela?

Pirâmides de base retangular

Observe as duas representações planas de uma pirâmide retangular: uma está em perspectiva e a outra é uma planificação de sua superfície. Os segmentos VE e EC são perpendiculares, e também os segmentos VE e ED.





1. Uma pirâmide de base retangular é uma figura tridimensional. Por quê?

___

2. Quantas faces possui uma pirâmide retangular? De que tipo são essas faces?

___

3. Compare sua resposta com a informação a seguir e, se necessário, modifique o que você escreveu.

O quadrilátero ABCD é um retângulo que delimita a face 1. Essa face é denominada **base** da pirâmide.

Os triângulos VAB, VBC, VCD e VAD delimitam as quatro faces laterais triangulares.

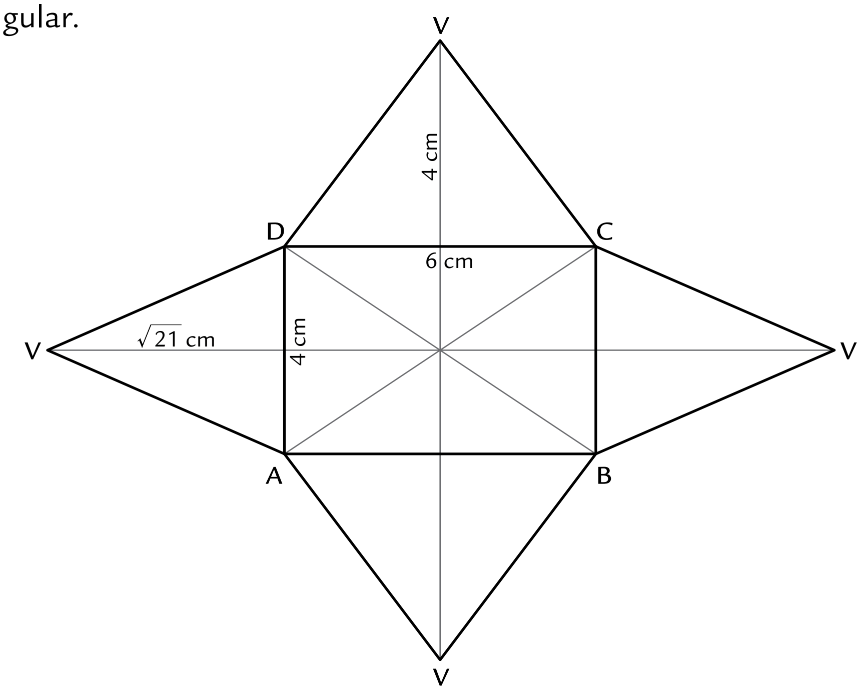
4. As faces laterais são triângulos isósceles? Justifique sua resposta.

___

___

A área da superfície de uma pirâmide

A figura abaixo é uma planificação da superfície de uma pirâmide de base retangular.



1. Determine a área da base dessa pirâmide.

---

2. Qual é a área de cada face lateral?

---

3. Qual é a soma das áreas de todas as faces laterais dessa pirâmide?

A soma das áreas das quatro faces laterais denomina-se **área lateral da pirâmide**.

4. Qual é a soma da área da base com a área lateral?

A soma da área da base com a área lateral denomina-se **área total da pirâmide**.

Jovens no mercado de trabalho

Muitos brasileiros entre 16 e 24 anos estão no mercado de trabalho.

1. Em uma turma de educação de jovens e adultos dessa faixa etária, cerca de 80% trabalham.

Observe, na tabela a seguir, o salário mensal de cada estudante.

Estudante	Salário	Estudante	Salário
Ana Lúcia	1.018,23	Lílian Marques	774,19
Alex Morais	813,09	Luís André	847,13
Aline Moreira	801,34	Luísa Lage	834,42
Ana Paula Ramos	1.206,99	Mara de Alencar	555,22
Bruno de Carvalho	919,84	Marcela de Lima	1.193,62
Caio Gaspar	1.205,49	Marcelo Batista	1.104,30
Camila Ramos	645,00	Natália Santos	589,32
Carla da Cunha	924,49	Paula Palácio	1.064,25
Daniel Ferreira	900,71	Pedro Chagas	611,77
Diego Oliveira	1.132,78	Rafael Augusto	849,50

a) Quantos estudantes há nessa turma?

b) Quais são o menor salário e o maior salário dessa turma?

c) Qual é o salário médio dos salários desses jovens? Explique como você calculou esse valor.

d) Compare sua explicação com o texto a seguir e, se necessário, modifique o que você escreveu.

Para calcularmos a média aritmética de um conjunto de dados, basta dividirmos a soma de todos os dados pela quantidade de dados do conjunto.

e) Qual salário “mais se afasta” do salário médio: o menor salário ou o maior salário? Quanto?

---

f) Quantos salários são menores e quantos são maiores que o salário médio?

---

2. Em um levantamento sobre a idade dos estudantes de uma turma do 9º ano que trabalhavam, uma professora organizou os dados em uma tabela de distribuição de frequências.

Note que algumas frequências da tabela são iguais entre si. Por exemplo, 17 e 20 anos têm frequência 2.

Idade (anos)	Frequência (f)
15	1
16	1
17	2
18	4
20	2
21	5
24	3
	Total:

Complete a tabela acima e de determine a idade média desse grupo de estudantes.

Média ponderada

Há situações, como provas, concursos e campeonatos esportivos, em que, para calcular a média final, atribuem-se pesos diferentes às modalidades que os compõem.

Em um concurso para uma vaga de agente sanitário, o candidato realiza três provas:

- Conhecimentos gerais, com peso 1.
- Conhecimentos específicos, com peso 3.
- Português, com peso 2.

Para ser aprovado, ele precisa obter, no mínimo, média 6,0.

Rosa concorreu a uma vaga e obteve as seguintes notas:
5,5 em conhecimentos gerais, 7,5 em conhecimentos específicos e 4,0 em Português.

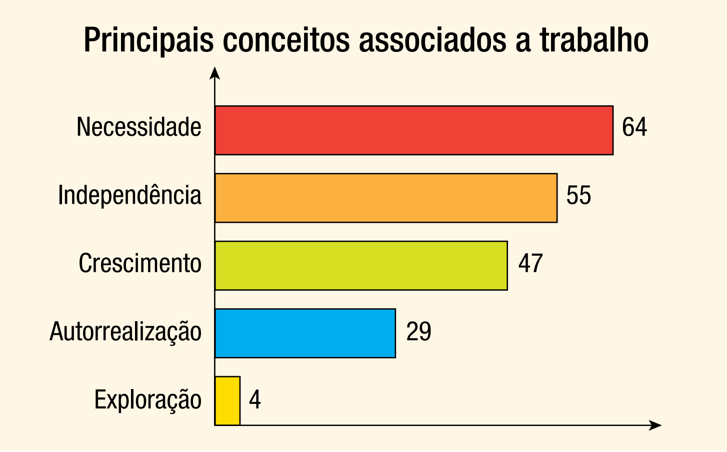
Para calcular sua média, levou em consideração os pesos atribuídos a cada prova, isto é, ponderou suas notas. Ela multiplicou a nota de cada prova pelo respectivo peso, somou esses produtos e dividiu o resultado pela soma dos pesos. Essa média é denominada média aritmética ponderada.

Utilize os procedimentos de Rosa e verifique se ela foi aprovada no concurso. Justifique sua resposta.

Fazer média é estar na moda?

1. A pesquisa Perfil da Juventude Brasileira é um estudo, realizado em áreas urbanas e rurais de todo o território nacional, sobre os interesses e preocupações de jovens de 15 a 24 anos, de ambos os sexos e de todos os segmentos sociais.

Veja a opinião deles sobre os conceitos associados a trabalho.



Fonte: Projeto Juventude/Instituto Cidadania, novembro e dezembro de 2003.

Qual é o conceito que os jovens mais associam a trabalho?

____

Esse conceito é a moda apontada pelos dados da pesquisa.

Moda de uma pesquisa é o dado (ou dados) com maior frequência no conjunto de dados.

2. Em um levantamento sobre jornada de trabalho diária de jovens que trabalham e estudam, um pesquisador obteve os seguintes resultados:

Número de horas	2	3	4	5	6	7	8
Frequência	6	10	13	10	7	1	3

A amostra envolveu 50 jovens.

a) Qual é a moda dessa amostra? ______________________

b) Qual é a média de horas trabalhadas nesse grupo de jovens?

____

3. Os pontos feitos em 11 jogos por um time de basquete foram: 84, 62, 95, 78, 92, 93, 86, 84, 102, 92, 98.

Qual é a média (aritmética) de pontos desse time? Mostre como você fez seus cálculos.

4. Uma professora de Matemática anotou em seu diário as seguintes notas de 40 estudantes de uma turma do 9º ano.

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de estudantes	1	3	3	8	8	6	6	3	1	1

a) Qual é, ou quais são, a moda dessa turma?

____

b) Qual é a média das notas dessa turma?

5. Uma escola adotou os seguintes pesos para as notas bimestrais para calcular a nota anual em todas as disciplinas:

Primeiro bimestre: peso 1

Segundo bimestre: peso 2

Terceiro bimestre: peso 3

Quarto bimestre: peso 4

Para ser aprovado em qualquer disciplina, um estudante precisa obter média, no mínimo, igual a 5.

Renata obteve as seguintes notas em Geografia no primeiro, segundo, terceiro e quarto bimestres, respectivamente: 4, 5, 4 e 6. Renata foi aprovada?

6. A classificação de cada time que participa de um campeonato de futebol amador é calculada por uma média ponderada em que cada vitória tem peso 3, cada empate tem peso 2 e cada derrota tem peso 1.

Complete a tabela calculando a classificação dos quatro finalistas:

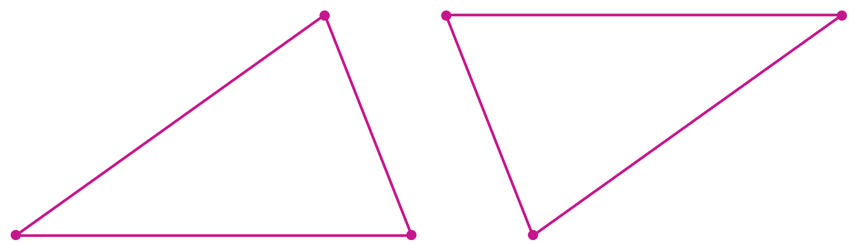
Time	Número de vitórias	Número de empates	Número de derrotas	Classificação (valor aproximado)
Tatuapé F. C.	4	5	3	
Mooca F. C.	5	3	4	
Lapa F.C.	4	7	1	
Parelheiros F.C.	5	4	3	

Houve time vencedor? Qual?

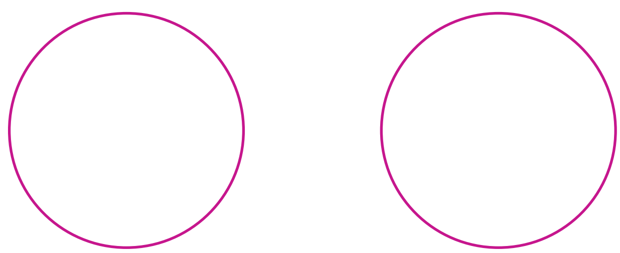
Figuras congruentes

1. Que relação existe entre as figuras de cada par abaixo?

a)



b)



Como muitas pessoas, talvez você tenha respondido que as figuras são parecidas ou iguais. No entanto, quem trabalha com ensino de Matemática diria que elas são congruentes.

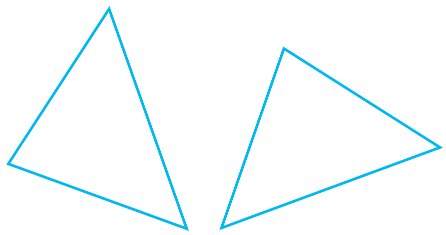
É bom saber algumas diferenças entre afirmar que duas coisas são iguais e que são congruentes.

Para entender a diferença, observe, nesses pares de figuras, que existem algumas transformações (translação, reflexão, rotação ou combinações delas) que permitem levar cada uma das figuras de cada par sobre a outra, de maneira que elas coincidam.

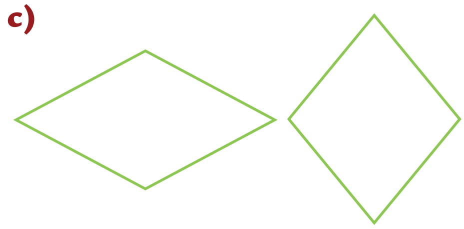
Quando é possível aplicar esses movimentos de modo que uma das figuras coincida com a outra por sobreposição, as figuras são congruentes.

2. Observe os seguintes pares de polígonos:

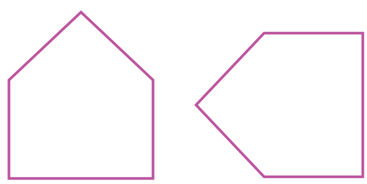
a)



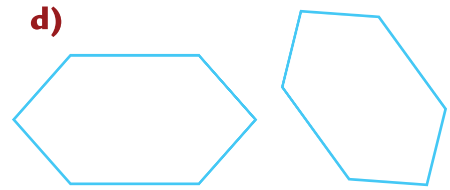
c)



b)



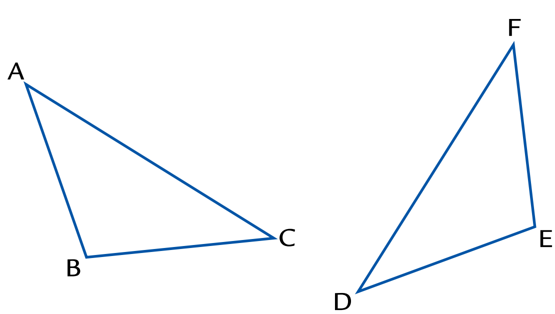
d)



Copie uma das figuras de cada par em um papel de seda e verifique, por sobreposição, quais pares são congruentes.

Os lados e os ângulos de dois polígonos que coincidem por sobreposição são chamados **lados correspondentes** e **ângulos correspondentes**.

3. Verifique que o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF, copiando o triângulo ABC em um papel de seda e sobrepondo-o ao triângulo DEF.

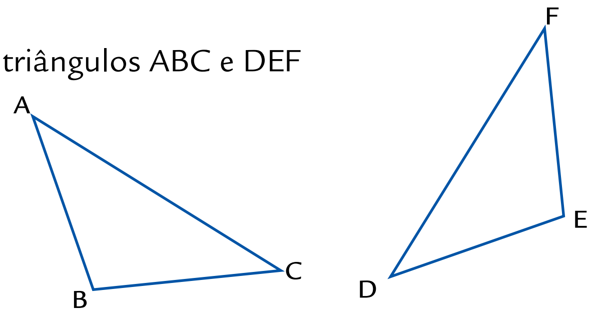


Complete o quadro abaixo, destacando os lados e ângulos do triângulo DEF que são correspondentes aos lados e ângulos do triângulo ABC.

	Lados			**Ângulos**		
ΔABC	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$
ΔDEF						

Congruência de triângulos

Considere novamente os triângulos ABC e DEF



1. O que se pode afirmar sobre os lados dos dois triângulos?

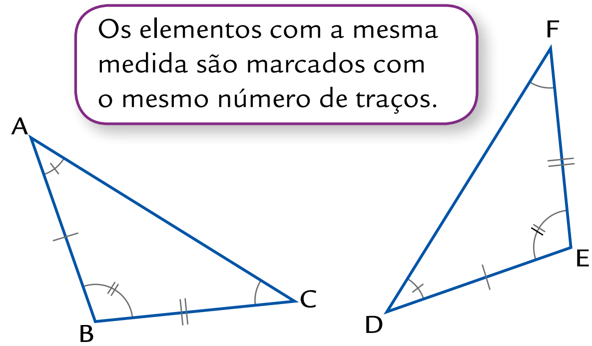
2. Que relação existe entre os ângulos desses triângulos?

3. Observando suas respostas nas atividades anteriores, explique: em que condições dois triângulos são congruentes?

4. Compare sua resposta com a definição a seguir e, se necessário, modifique o que você escreveu.

Dois triângulos são congruentes quando possuem lados correspondentes com a mesma medida e ângulos correspondentes com a mesma medida.

Os elementos com a mesma medida são marcados com o mesmo número de traços.



Indicamos Δ ABC ≡ Δ DEF

5. Complete com os elementos correspondentes.

Lados	$\overline{AB}$;	$\overline{BC}$;	$\overline{CA}$;
Ângulos	$\hat{A}$;	$\hat{B}$;	$\hat{C}$;

Construção de triângulos e casos de congruência

1. Para construir, com régua e compasso, um triângulo ABC com medidas dos lados iguais a 3 cm, 4 cm e 6 cm, Daniel pensou nos seguintes procedimentos:

- Desenhar, com a régua, um segmento com 6 cm e denominá-lo AB.
- Depois, com a abertura do compasso igual a 4 cm e ponta seca em A, traçar um arco.
- Fazer o mesmo em B, com abertura do compasso igual a 3 cm. O ponto de cruzamento dos dois arcos é o vértice C.
- Traçar os lados AC e BC do triângulo.

Verifique se realmente é possível construir o triângulo ABC seguindo os procedimentos de Daniel, em uma folha de papel sulfite.

2. Se Daniel tivesse começado pelo lado que mede 4 cm ou 3 cm, seria possível construir um triângulo?

Experimente, construindo em uma folha de papel sulfite, com régua e compasso, o triângulo ABC das duas maneiras mencionadas: você começa pelo lado de 4 cm ou 3 cm e um colega, pelo outro lado.

3. Em seguida, cada um recorta o triângulo que construiu. Verifiquem, por sobreposição, se os dois triângulos são congruentes ao triângulo construído na atividade 1. O que você conclui?

---

4. Compare sua conclusão com o texto e, se necessário, modifique o que você escreveu.

Quando se conhecem as três medidas dos lados de um triângulo, é possível afirmar que todos os triângulos construídos com essas medidas são congruentes.

Tal propriedade é chamada de caso de congruência **LLL** (lado, lado, lado).

Isso significa que, nesse caso, não é necessário comparar as medidas dos ângulos.

Outros casos de congruência

Além do caso LLL, é possível concluir que dois triângulos são congruentes sem conhecer as medidas dos três lados e dos três ângulos?

Para responder a essa pergunta, realize as seguintes atividades em uma folha de papel sulfite, com régua, compasso e transferidor.

1. Construa um triângulo MNP, de modo que o lado MN meça 4,5 cm, o lado NP, 7 cm e o ângulo entre eles seja de 60°.

Recorte o triângulo e sobreponha-o ao triângulo de seu colega.

O que se pode concluir sobre esses dois triângulos?

Se dois triângulos têm respectivamente iguais as medidas de dois lados e a medida do ângulo formado por esses lados, então eles são congruentes.

Tal propriedade é chamada de caso de congruência **LAL** (lado, ângulo, lado).

2. Construa um triângulo JKL, de modo que o lado KL meça 8 cm, o ângulo JKL seja de 70° e o ângulo KLJ, de 50°.

Esses ângulos são adjacentes ao lado KL.

Recorte o triângulo e sobreponha-o ao triângulo de seu colega.

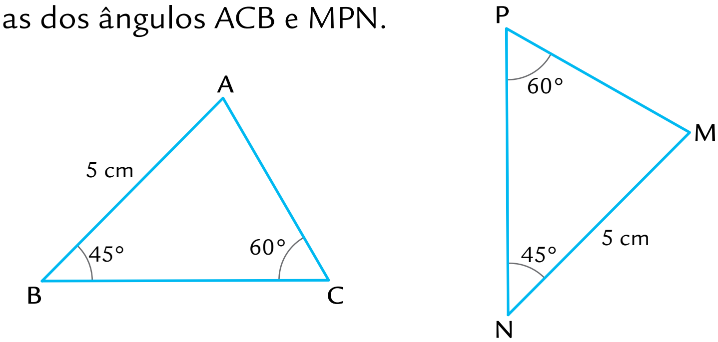
O que se pode concluir sobre esses dois triângulos?

Se dois triângulos têm respectivamente iguais as medidas de um lado e de dois ângulos adjacentes a esse lado, então eles são congruentes.

Tal propriedade é chamada de caso de congruência **ALA** (ângulo, lado, ângulo).

Há congruência ou não?

1. Observe que os triângulos ABC e MNP têm respectivamente iguais as medidas dos lados AB e MN, as medidas dos ângulos ABC e MNP e as medidas dos ângulos ACB e MPN.



a) Assinale, usando o mesmo número de traços, os pares de lados e ângulos congruentes.

b) Verifique, por sobreposição, que os dois triângulos são congruentes.

O caso que justifica essa congruência é conhecido como **LAA_o** (lado, ângulo, ângulo oposto).

Escreva um enunciado para esse caso de congruência entre dois triângulos.

---

2. Em uma folha de papel sulfite, construa um triângulo com ângulos medindo 30°, 50° e 100°.

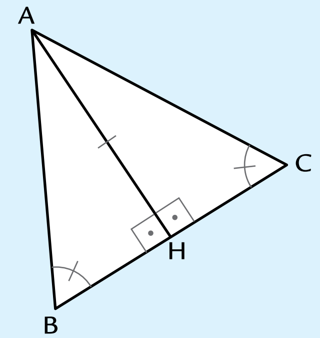
a) É possível construir outro triângulo com essas medidas que não seja congruente ao triângulo que você construiu? Mostre um exemplo, também na folha de sulfite.

---

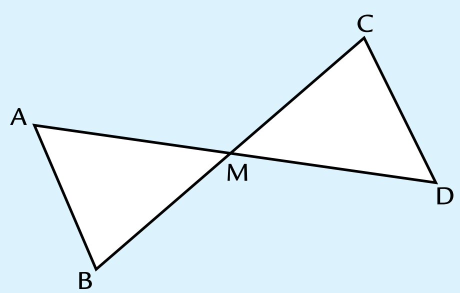
b) Você pode afirmar que, se as medidas dos três ângulos de dois triângulos forem respectivamente iguais, então os triângulos são congruentes?

Exercícios

1. Observe os pares de elementos com mesma medida assinalados.
Identifique o caso de congruência que permite dizer que os triângulos AHB e AHC são congruentes.



2. Na figura ao lado, o ponto M é o ponto médio dos segmentos AD e BC.



Justifique as seguintes afirmações:

a) Os segmentos AM e MD têm medidas iguais.

____

b) Os segmentos BM e MC têm medidas iguais.

____

c) Os ângulos AMB e CMD têm a mesma medida.

____

d) Os triângulos AMB e CMD são congruentes.

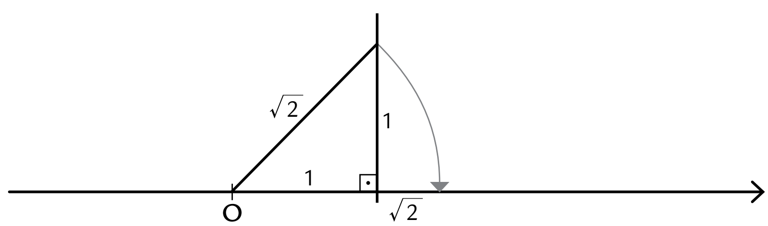
____

Números irracionais na reta numérica

Acompanhe como Flávia localizou o número irracional $\sqrt{2}$ na reta numérica.

Inicialmente, ela construiu um triângulo retângulo isósceles cujos catetos mediam 1 unidade e a hipotenusa, $\sqrt{2}$ unidade.

Em seguida, com o compasso, ela traçou um arco com centro na origem O e raio igual à hipotenusa, até interceptar a reta.



1. Sabendo que $\sqrt{3}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{2}$ e 1, utilize procedimentos parecidos com os de Flávia e localize na reta numérica o número irracional $\sqrt{3}$.

2. Como você poderia localizar $-\sqrt{2}$, que é o oposto de $\sqrt{2}$?

Hora de escolher

No final do 9º ano, Mário, Antônio e Carlos se inscreveram para prestar "vestibulinho" para uma escola técnica.

1. Escreva a relação entre o número de candidatos e o número de vagas dos cursos escolhidos por Mário, Antônio e Carlos.

---

2. Quais das representações que você escreveu têm expressão algébrica no denominador?

Essas representações são denominadas expressões algébricas na forma fracionária.

Elas apresentam as mesmas propriedades dos números racionais na forma fracionária, sempre com o denominador diferente de zero.

3. Quais são os valores que não podem ser atribuídos ao denominador de cada representação algébrica na forma fracionária da atividade anterior?

Expressões algébricas na forma fracionária

Para obtermos expressões algébricas na forma fracionária equivalentes a outra expressão fracionária dada, multiplicamos ou dividimos seu numerador e seu denominador por um mesmo fator não nulo, da mesma maneira que fazemos com os números racionais.

Veja os exemplos:

Número racional	Expressão algébrica
$\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$	$\frac{248}{x} = \frac{248 \cdot a}{x \cdot a}$

1. Acompanhe como Miguel obteve duas representações fracionárias equivalentes a $\frac{12}{60}$.

$$\frac{12}{60} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Explique os procedimentos que ele adotou.

____

____

2. Procedendo como Miguel, obtenha uma representação fracionária equivalente a $\frac{3 \cdot b \cdot c}{9 \cdot a \cdot b \cdot c}$.

Mostre como você fez seus cálculos.

Adição e subtração

1. Do total de estudantes da turma de Daniela, $\frac{5}{8}$ pretendem fazer o Ensino Médio, $\frac{2}{8}$ um curso técnico e o restante, um curso profissionalizante.

a) Escreva, na forma fracionária, o total de estudantes da turma de Daniela que pretendem fazer o Ensino Médio e o curso técnico. Registre como você fez seus cálculos.

b) Qual a forma fracionária que representa os estudantes que pretendem fazer um curso profissionalizante? Registre como você fez seus cálculos.

2. Sabendo que, para adicionarmos ou subtrairmos expressões algébricas na forma fracionária, utilizamos os mesmos procedimentos adotados para os números racionais na forma fracionária, obtenha:

a) $\frac{8}{3 \cdot a} + \frac{2}{3 \cdot a} =$	**b)** $\frac{x}{x-1} - \frac{2 \cdot x}{x-1} =$

3. Analise os procedimentos que Daniela utilizou para adicionar e subtrair frações com denominadores diferentes:

a) $\frac{2}{15} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{30} + \frac{15}{30} + \frac{25}{30} = \frac{4 + 15 + 25}{30} = \frac{44}{30}$

b) $\frac{8x}{3 \cdot a^2} - \frac{5 \cdot x}{a} + \frac{x}{9 \cdot a} = \frac{24 \cdot x}{9 \cdot a^2} - \frac{45 \cdot a \cdot x}{9 \cdot a^2} + \frac{a \cdot x}{9 \cdot a^2} = \frac{24 \cdot x - 45 \cdot a \cdot x + a \cdot x}{9 \cdot a^2} =$

$= \frac{24 \cdot x - 44 \cdot a \cdot x}{9 \cdot a^2}$

Que conclusões você pode obter desses exemplos?

____

____

____

4. Compare suas observações com o texto a seguir e, se necessário, modifique o que você escreveu.

Para adicionar e subtrair expressões algébricas na forma fracionária com denominadores diferentes, é conveniente reduzi-las a um mesmo denominador para transformá-las em formas fracionárias equivalentes e depois efetuar as operações.

Um denominador comum pode ser o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos denominadores.

O mínimo múltiplo comum para as expressões algébricas é o produto dos fatores comuns com os maiores expoentes pelo fator não comum.

Acompanhe:

a) Fatoramos 15, 2 e 6:	**b)** Fatoramos: $3 \cdot a^2$, a e 9:
$15 = 3 \times 5$	$3 \cdot a^2 = 3 \cdot a^2$
$2 = 2$	$a = a$
$6 = 2 \times 3$	$9 \cdot a = 3^2 \cdot a$
m.m.c. de $(15; 2; 6) = 2 \times 3 \times 5 = 30$	m.m.c. de $(3 \cdot a^2; a; 3^2 \cdot a) = 3^2 \cdot a^2 = 9 \cdot a^2$

Multiplicação e divisão

1. Na classe de Daniela, dos $\frac{5}{8}$ que pretendem cursar o Ensino Médio, $\frac{2}{3}$ são do sexo feminino e dos $\frac{2}{8}$ que querem fazer um curso técnico, metade é do sexo masculino.

a) Que fração dos estudantes que pretendem cursar o Ensino Médio representa o sexo feminino?

Explique como você chegou à solução do problema.

---

b) Que fração de estudantes que querem fazer um curso técnico representa o sexo masculino?

---

2. Determinamos o produto e o quociente de duas expressões algébricas na forma fracionária seguindo os mesmos procedimentos de cálculo usados para as frações numéricas:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \text{ e } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

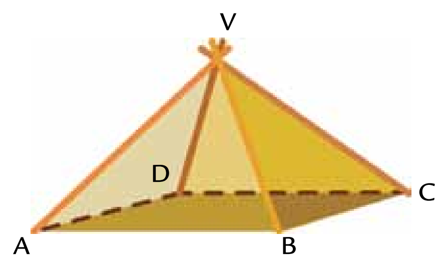
Observe os procedimentos acima adotados em cada operação e calcule o produto e o quociente seguintes:

a) $\frac{12 \cdot x}{y^2} \cdot \frac{2 \cdot x^2}{5 \cdot y^3} =$

b) $\frac{7 \cdot m \cdot n}{t^2} \div \frac{t}{2 \cdot m^4} =$

Agora, é com você

1. Um artesão resolveu confeccionar um objeto na forma de uma pirâmide de base quadrada.



Para isso, ele pretende usar chapas finas de cobre para as faces e pequenas varetas, também de cobre, para as arestas. Sabendo que todas as arestas têm 10 cm de medida, calcule a área de cada face lateral e a área da base dessa pirâmide.

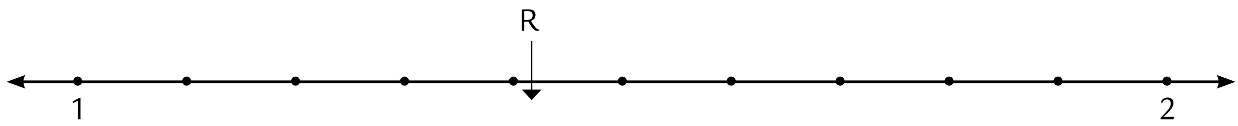
2. (Encceja – Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos, 2006) Em um concurso interno realizado por uma empresa, os quatro candidatos ao cargo obtiveram as seguintes notas na prova escrita e na prova prática.

Candidatos	Prova escrita	Prova prática
Carla	7,5	8,5
Luís	8	8,5
Mariana	6,5	9
Nelson	8,5	7

A nota final de cada candidato é a média aritmética das notas que ele obteve em cada prova. O candidato que obteve a maior média no concurso foi:

☐ a) Carla.
☐ b) Luís.
☐ c) Mariana.
☐ d) Nelson.

3. (Prova da Cidade, 2009) O segmento da reta numérica abaixo está dividido em partes iguais.



É correto afirmar que o número $\sqrt{2}$, correspondente ao ponto R, está entre:

☐ a) 1,3 e 1,4
☐ b) 1,40 e 1,45
☐ c) 1,49 e 1,51
☐ d) 1,5 e 1,6

4. (Prova da Cidade, 2009) Quando você soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, você faz a redução das frações ao mesmo denominador. Com base nesse procedimento, como você faria o cálculo de $\frac{1}{2a} + \frac{1}{4b}$?

☐ a) $\frac{2 + 1}{4ab}$

☐ b) $\frac{2b + 1a}{4ab}$

☐ c) $\frac{2a + 1b}{4ab}$

☐ d) $\frac{2ab + 1ab}{4ab}$

5. Os catetos de um triângulo retângulo medem 8 cm e 6 cm. O maior ângulo é oposto ao lado de:

☐ a) 6 cm
☐ b) 8 cm
☐ c) 10 cm
☐ d) 12 cm

UNIDADE 7

Nesta Unidade, temas ligados à saúde e à qualidade de vida são interessantes para apresentar situações-problema que envolvem o cálculo de volumes de cubos e paralelepípedos, a ampliação e redução de figuras no plano, a noção de semelhança de figuras planas e os sistemas de equações.

Também estabeleceremos relações entre elementos dos diferentes campos numéricos.


LILIAN BORGES

Saúde e qualidade de vida são dois temas estreitamente relacionados.

Para ter boa saúde, é necessário, entre outras coisas, que a água seja tratada, haver saneamento básico, condições de trabalho e moradia, alimentação saudável, lazer e preservação do meio ambiente.

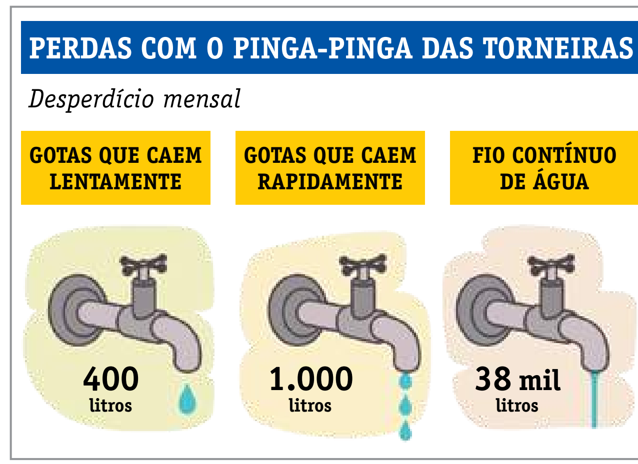
Quais ações você poderia realizar para prevenir males físicos e sociais e garantir a qualidade de vida de todos?

Água: essencial à existência e ao bem-estar

A água na cidade de São Paulo já perdeu a característica de recurso natural renovável e, para consumi-la, está ficando cada vez mais caro.

Essa situação resulta da crescente demanda pelo recurso e do desperdício.

Para ter uma ideia do problema, veja as perdas decorrentes do “pinga-pinga” de uma torneira.



Fonte: <www.agersa.cachoeiro.es.gov.br>.

1. Litro (L) e metro cúbico (m^3) são unidades de capacidade e volume. Um metro cúbico é o volume de um cubo com 1 m de aresta:

$$V = 1\ m \cdot 1m \cdot 1m = 1m^3$$

Qual é o volume de um cubo com 1 dm de aresta? ____________________

2. Sabendo que 1L = 1 dm^3, responda:

a) Qual é a perda mensal, em metros cúbicos, de uma torneira que desperdiça 1.000 litros? ____________________

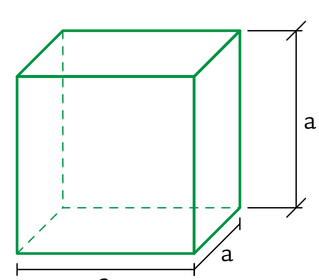
b) Qual é o desperdício mensal, em metros cúbicos, de uma torneira cujas gotas caem lentamente? ____________________

3. Como se calcula o volume de um cubo?

____

4. Escreva uma fórmula para calcular o volume de um cubo com arestas medindo **a**.

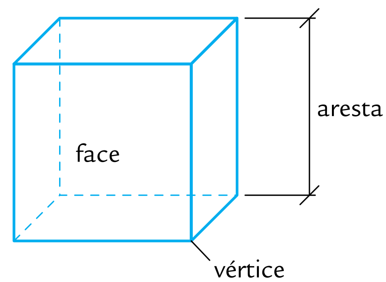
____



Reaproveitamento da água da chuva

João pensou em uma ação ecologicamente correta: utilizar a água da chuva para molhar plantas, limpar pisos e calçadas, lavar carros, dar descarga em vasos sanitários e muito mais.

Na busca de informações, ele soube que precisava construir um sistema para captação, filtragem e armazenamento da água.



1. De início João imaginou construir uma caixa de forma cúbica com capacidade para armazenar, no máximo, 8 m^3 de água.

a) Quantos litros de água poderiam ser armazenados nessa caixa?

b) Qual é a medida de suas arestas? Mostre como você fez os cálculos.

c) Qual é o volume que ela contém, quando se coloca água até o nível de 1,5 m de altura?

2. Um recipiente de água tem a forma de um cubo cujas arestas medem 50 cm. Quantas jarras com capacidade de meio litro cada uma podem ser enchidas com a água desse recipiente?

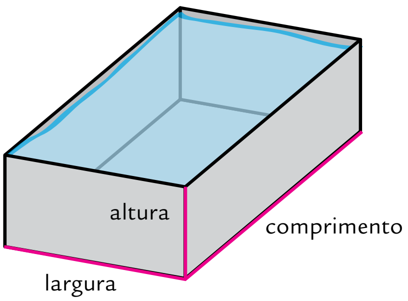
Cisterna: uma solução

1. A cisterna rural é conhecida como um reservatório fechado para armazenar a água de chuva para consumo humano.

Você já viu algum tipo de cisterna? Em caso afirmativo, descreva-a.

---

2. Quando vivia em uma vila no sertão de Pernambuco, Cícero e seus vizinhos construíram uma cisterna na forma de um bloco retangular – ou paralelepípedo.



Que quantidade de água pode ser armazenada nessa cisterna com 2,5 m de comprimento por 2 m de largura e 1 m de altura?

Escreva um procedimento para calcular o volume ocupado por essa cisterna e registre seus cálculos.

3. Definindo a medida da largura de um bloco retangular por ℓ, a medida de seu comprimento por **c** e a medida de sua altura por **a**, escreva uma fórmula para calcular o volume desse bloco.

Volume do bloco = ____________________

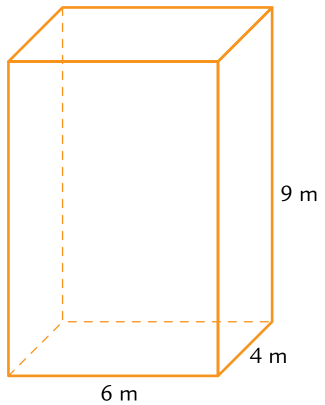
Áreas e volumes

1. A área total de uma caixa cúbica é igual a 6 m^2.

a) Qual é a área de uma das faces?

b) Qual é o volume dessa caixa?

2. Um recipiente de armazenamento de água tem a forma de um bloco retangular, cujas dimensões estão indicadas na figura a seguir.

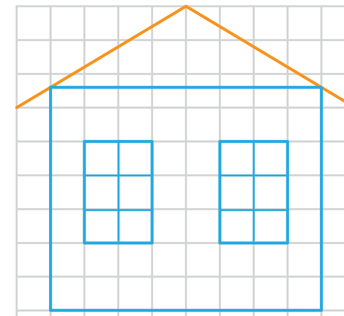


a) Qual é a capacidade desse recipiente?

b) Se a capacidade de um cubo é igual à capacidade desse bloco, qual é a medida das arestas do cubo?

c) Qual a área total desse cubo?

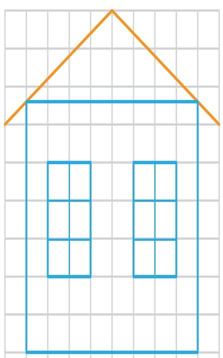
Moradia e cidadania



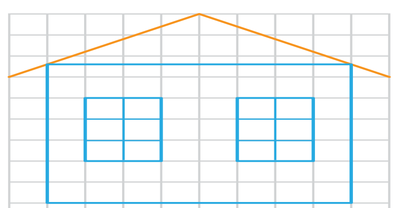
Para garantir uma moradia adequada que assegure qualidade de vida, Maria se empenhou, durante muitos anos, para ter sua casa.

Observe ao lado a fachada de uma casa escolhida por Maria, desenhada em malha quadriculada.

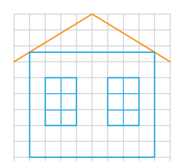
Analise a mesma fachada desenhada em outras malhas:



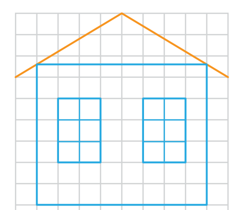
A



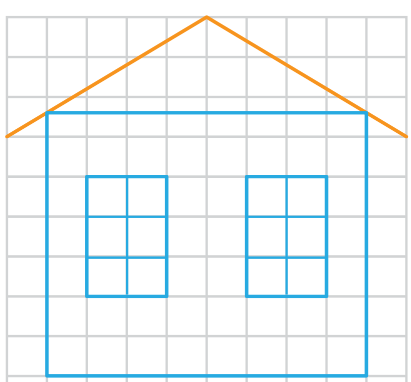
B



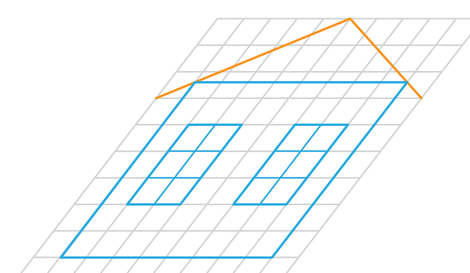
C



D



E



F

a) Quais das figuras, A, B, C, D, E ou F, são ampliações proporcionais da figura original?

____

b) Quais delas são reduções proporcionais da figura original?

____

Ampliação e redução

Muitas coisas não podem ser desenhadas nos tamanhos naturais. Por isso, suas representações são feitas aumentando ou reduzindo as medidas reais.

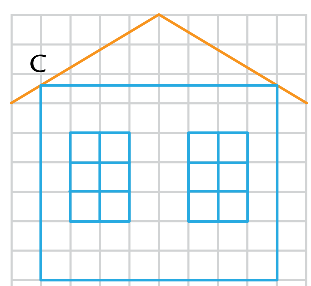


Figura G

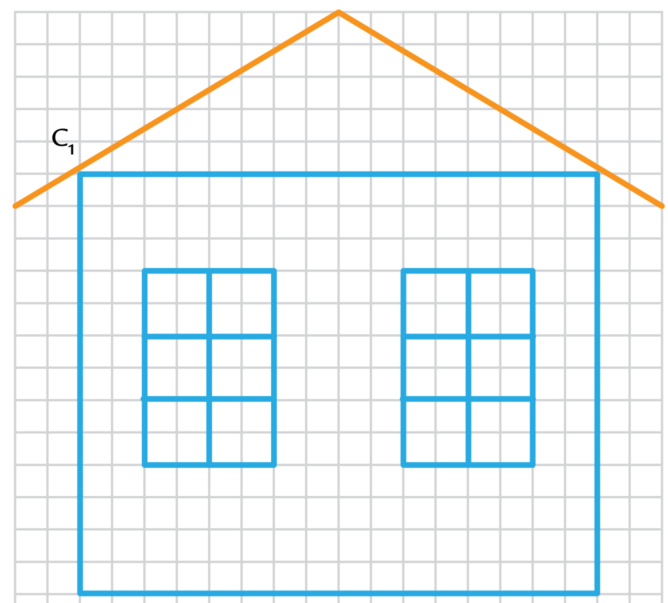


Figura H

Para ampliar, ou reduzir um desenho, entre vários métodos, podemos usar malhas quadriculadas.
Observe na figura G os segmentos destacados AB e AC e, na figura H, os segmentos destacados A_1B_1 e A_1C_1.

a) Determine as razões: $\frac{A_1B_1}{AB}$ e $\frac{A_1C_1}{AC}$, considerando unidade de comprimento a medida dos lados de cada quadradinho.

b) Os segmentos A_1B_1, AB, A_1C_1 e AC são proporcionais, nessa ordem? Justifique sua resposta.

Para que um desenho mantenha a forma do objeto real, reduzimos ou ampliamos as medidas de comprimento do objeto de modo que se conserve a razão entre as dimensões e as medidas dos ângulos correspondentes.


NEILA GOMES

Parecido ou semelhante?

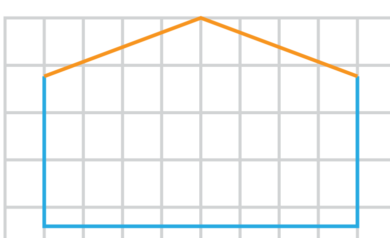
Adolescentes são todos parecidos! Você já ouviu essa frase?

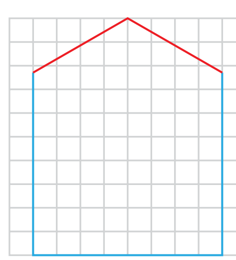
Em um exame apressado, adolescentes parecem semelhantes pela linguagem, pelo vestuário, pelas maneiras de se divertirem.

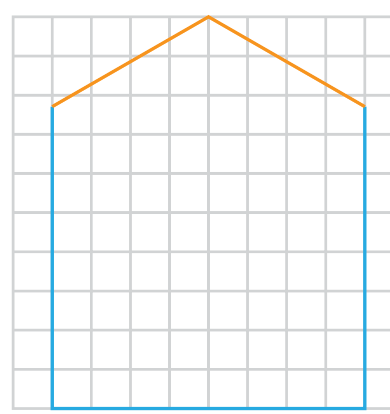
No entanto, como qualquer ser humano, nenhum adolescente é igual a outro. Em comum, apenas o fato de que cada um é o principal responsável pela própria saúde e qualidade de vida, aprendendo a cuidar de seu bem-estar físico, emocional, psicológico, espiritual e social.

Consulte um dicionário e verifique se as palavras “parecido”, “semelhante” e “igual” têm o mesmo significado. ______________________________

1. As figuras seguintes são parecidas ou semelhantes? ____________________


M


N

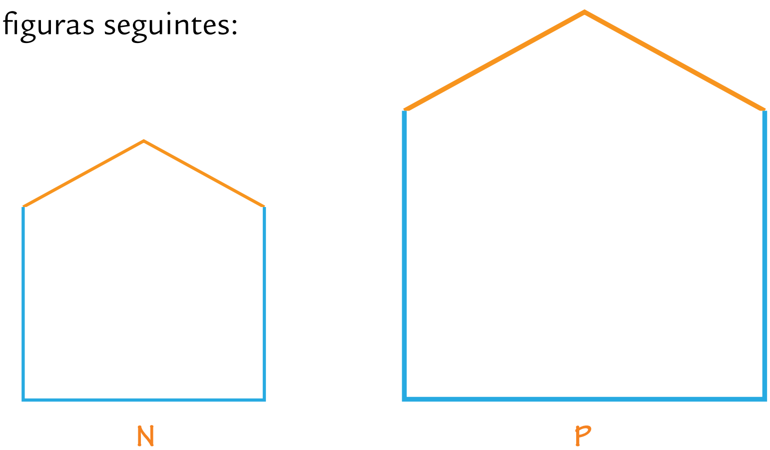

P

2. É possível que você tenha verificado que um dos significados de semelhante é parecido. Porém, em Matemática, para que duas figuras geométricas sejam semelhantes não basta serem parecidas: uma delas precisa ser uma ampliação ou redução proporcional de outra.

Entre as três figuras, qual é o par de figuras semelhantes? ______________

Semelhança

Observe as figuras seguintes:



1. Verifique se as medidas dos lados correspondentes são proporcionais. Justifique sua resposta.

____

____

2. Meça com um transferidor os ângulos das duas figuras e verifique se os ângulos correspondentes têm medidas iguais. ____________________

3. Dois polígonos são semelhantes quando as medidas dos lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes têm medidas iguais.

A razão entre as medidas de dois lados correspondentes é chamada **razão de semelhança** ou constante de proporcionalidade entre as medidas lineares.

a) De acordo com essa afirmação, as figuras N e P são semelhantes?

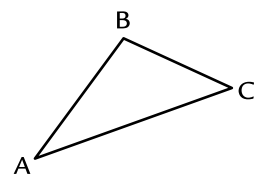
____

b) Em caso afirmativo, qual é a razão de semelhança entre as figuras N e P?

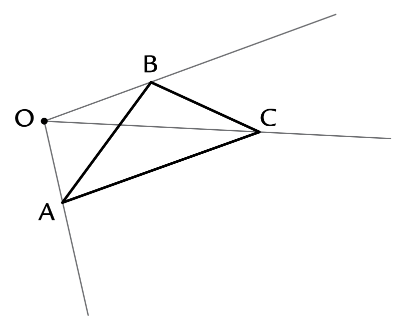
____

Ampliar ou reduzir figuras por homotetia

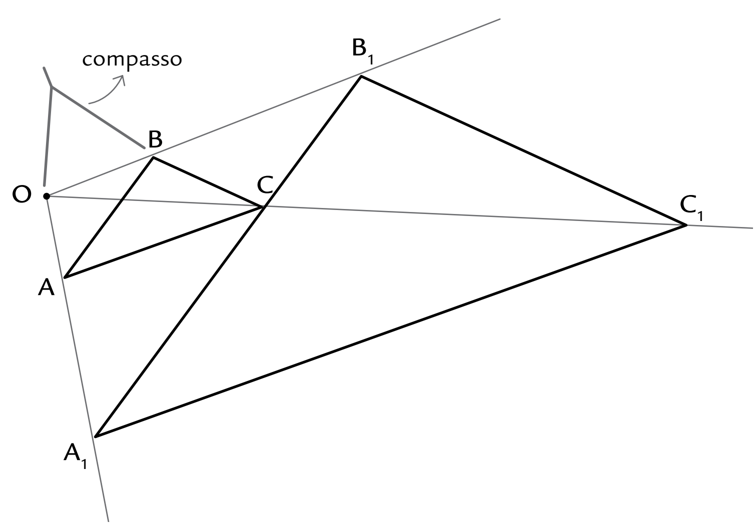
Acompanhe outra maneira de ampliar ou reduzir uma figura que Chico aprendeu, observando o procedimento utilizado por ele para triplicar as medidas dos lados do triângulo ABC.



Em primeiro lugar, Chico escolheu um ponto qualquer O e traçou três semirretas com origem no ponto O e passando pelos vértices do triângulo.



Em seguida, com um compasso, marcou o ponto A_1 na semirreta OA, o ponto B_1 na semirreta OB e o ponto C_1 na semirreta OC, de modo que $OA_1 = 3 \cdot OA$, $OB_1 = 3 \cdot OB$ e $OC_1 = 3 \cdot OC$.
Unindo esses pontos, ele obteve o triângulo triplicado $A_1B_1C_1$.



1. Nessa construção, verifique:

a) com um transferidor, se as medidas dos ângulos correspondentes se mantêm.

____

b) com uma régua, se as medidas dos lados do novo triângulo são o triplo das medidas dos lados correspondentes do triângulo original.

____

2. Esses dois triângulos são semelhantes? Justifique sua resposta.

____

____

Esse procedimento é conhecido como ampliação por **homotetia**. O ponto **O** é denominado **centro de homotetia** e, nesse caso, a razão de homotetia é **3**.

3. Nas figuras obtidas por homotetia os lados correspondentes são paralelos.

a) Qual é a razão entre o perímetro do triângulo triplicado e o perímetro do triângulo original? ______________________________

b) Qual é a relação entre essa razão e a razão de homotetia?

____

4. Analise a proporção entre as medidas dos dois triângulos e responda às perguntas:

a) Qual é a constante de proporcionalidade entre as alturas correspondentes dos dois triângulos? ______________________

b) No triângulo original, se a altura relativa ao lado maior mede 1,1 cm, qual é a medida da altura correspondente no triângulo ampliado?

____

c) Qual é a razão entre a área do triângulo triplicado e a do triângulo original? ______________________________

Perímetros, áreas e semelhança

O terreno em que está a casa que Maria comprou é retangular, com 8 m de frente e 20 m de fundo.

a) Desenhe um retângulo semelhante a esse terreno cuja frente é representada por um segmento de 2 cm.

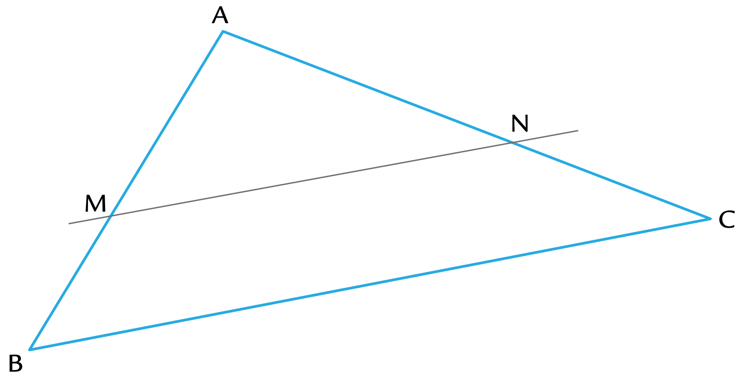
b) Qual é a razão de semelhança entre as medidas reais do terreno e as medidas que você usou em seu desenho?

c) Qual é a razão entre o perímetro do terreno e o de seu desenho?

d) Qual é a razão entre a área do terreno e a de seu desenho?

Semelhança de triângulos

1. Analise a figura abaixo. Ela mostra o triângulo ABC e uma reta paralela ao lado BC, que corta os outros dois lados nos pontos M e N.

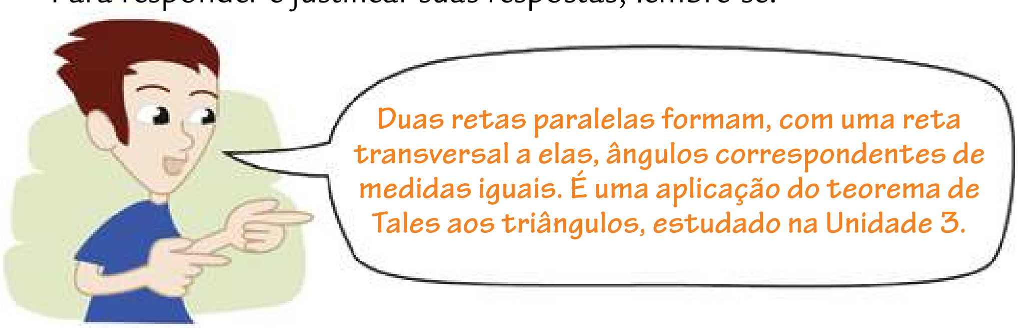


a) Nos triângulos ABC e AMN, os ângulos correspondentes são congruentes?

---

b) O que se pode concluir com relação aos lados correspondentes AB, AM, AC e AN?

Para responder e justificar suas respostas, lembre-se:

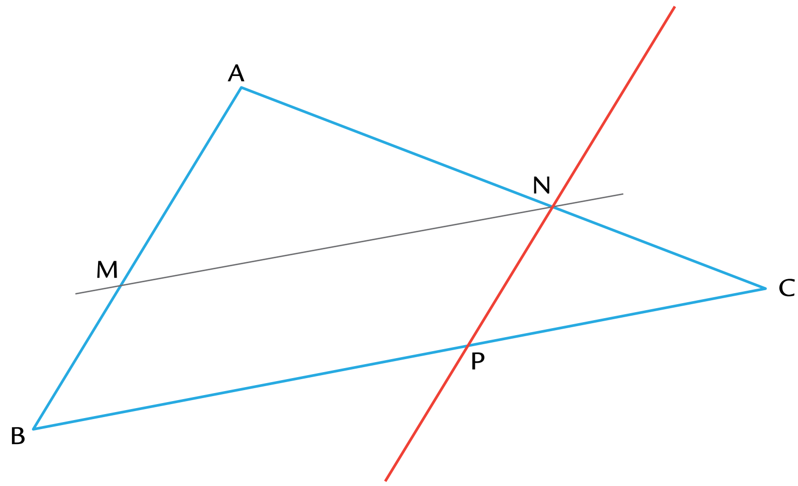


---

c) Escreva uma relação entre as medidas desses lados.

---

2. A reta NP é paralela ao lado AB do triângulo ABC.



a) Note que, se $\frac{CN}{AN} = \frac{CP}{BP}$, é possível concluir que $\frac{AC}{AN} = \frac{BC}{BP}$? Por quê?

b) O quadrilátero MBPN é um paralelogramo. O que você pode escrever sobre os segmentos MN e BP?

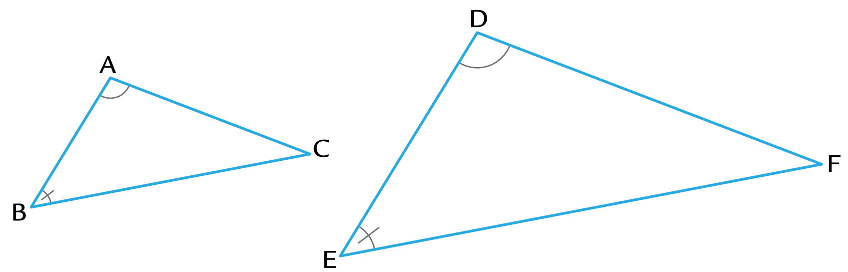
c) $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$? Justifique sua resposta.

3. Os triângulos ABC e AMN são semelhantes? Por quê?

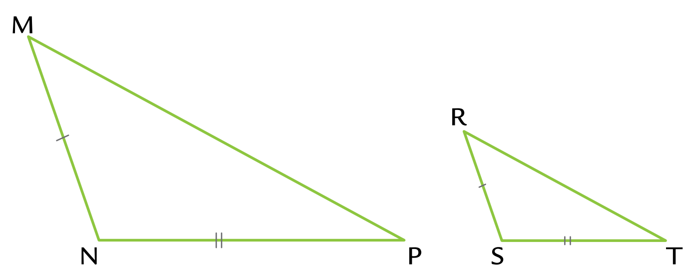
Casos de semelhança

Muitas vezes precisamos saber se dois triângulos são semelhantes e não conhecemos as medidas de todos os lados nem de todos os ângulos.
No entanto, podemos reduzir essas condições para três casos de semelhança.

1º CASO: Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes com mesma medida, então esses triângulos são semelhantes.



2º CASO: Se dois triângulos têm lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.



1. Pesquise em livros didáticos disponíveis e enuncie o terceiro caso de semelhança de triângulos.

____

____

2. Os triângulos ABC e MNP são triângulos retângulos. Cada um tem um ângulo agudo que mede 70°. Esses triângulos são semelhantes? Por quê?

____

____

Medições indiretas

1. Para medir o mastro da bandeira da escola, o grupo de Gabriel e Letícia resolveu o problema da seguinte maneira.

O grupo fincou uma vareta com 30 cm no chão, em posição vertical, e começou a medir a sombra da vareta conforme o tempo foi passando.

Na primeira vez, o grupo obteve uma sombra com 50 cm; após algum tempo foram obtidas sombras com 46 cm, 42 cm e 35 cm. Quando a sombra da vareta ficou com 30 cm, o grupo mediu a sombra do mastro e encontrou 5,60 m. Faça um desenho para ilustrar essa situação.

a) Que conclusão esse grupo pôde obter sobre a altura do mastro?

Quando os alunos do grupo de Gabriel e Letícia levaram a professora ao local onde haviam fincado a vareta, notaram, decepcionados, que já havia passado o momento em que a sombra tinha o mesmo comprimento da vareta.

Para mostrar à professora que tinham entendido o desafio, Letícia teve uma ideia: esperou que a sombra da vareta, que estava diminuindo com o passar do tempo, tivesse um comprimento igual à metade do comprimento da vareta (15 cm) e mediu a sombra do mastro.

Ela usou um raciocínio semelhante ao anterior e convenceu a professora.

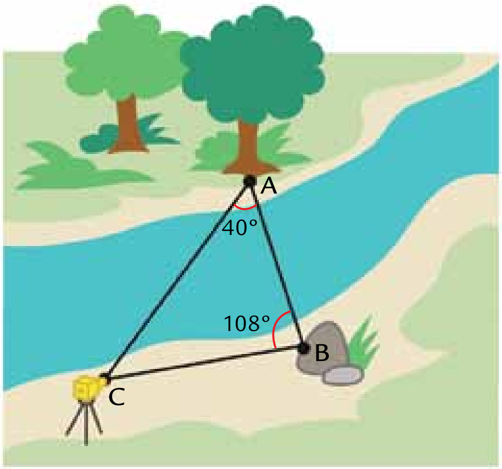
b) Qual foi o argumento usado por Letícia?

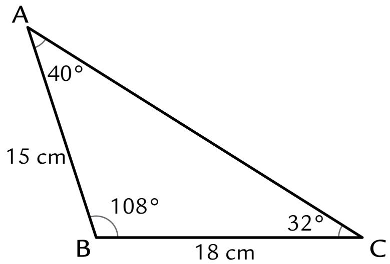
c) Qual foi a medida encontrada por Letícia?

2. A ilustração seguinte mostra um modo como um topógrafo determinou o comprimento de uma ponte. Nomeou suas extremidades de A e B.

Depois de marcar o ponto C a 60 m do ponto B, com um teodolito, instrumento para medir ângulos, mediu dois ângulos: um com 40° e outro com 108°.

Com as medidas dos três ângulos, o topógrafo desenhou um triângulo semelhante ao traçado na representação do rio.

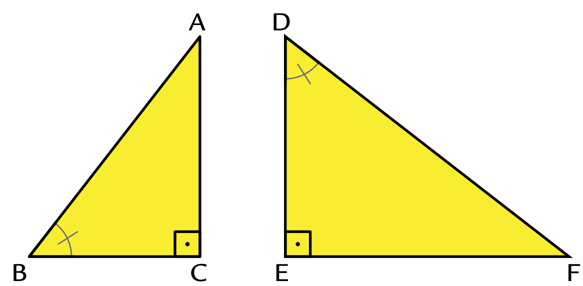




Observando os dois triângulos, o que você terá de fazer para calcular a largura do rio? Faça um plano para resolver esse problema, explicando seus procedimentos.

Relações métricas em triângulos retângulos

1. Um metalúrgico produziu duas chapas metálicas triangulares como mostra a figura ao lado:

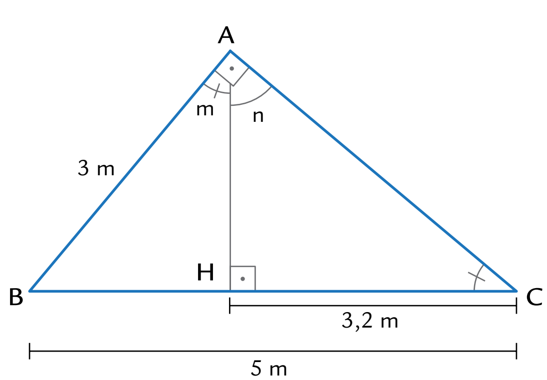


a) Justifique a semelhança entre os triângulos ABC e DEF.

b) Identifique e escreva os pares de lados proporcionais.

c) Se $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente 5 cm e 12 cm e $\overline{DE}$ tem a mesma medida de $\overline{AC}$, então qual é a medida de $\overline{EF}$?

2. Márcio desenhou a figura abaixo, que representa as inclinações do telhado de uma casa.



a) Observe esse desenho e identifique os triângulos retângulos que nele aparecem.

b) A afirmação m = 90° – n é verdadeira? Por quê?

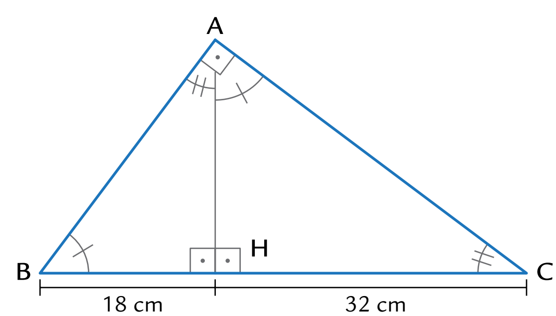
c) Os ângulos BAH e ACH têm medidas iguais? Justifique sua resposta.

d) Os triângulos ABH e AHC são semelhantes. Por quê?

e) Identifique e escreva os pares de lados proporcionais.

f) Obtenha a medida da altura AH. Mostre como você fez seus cálculos.

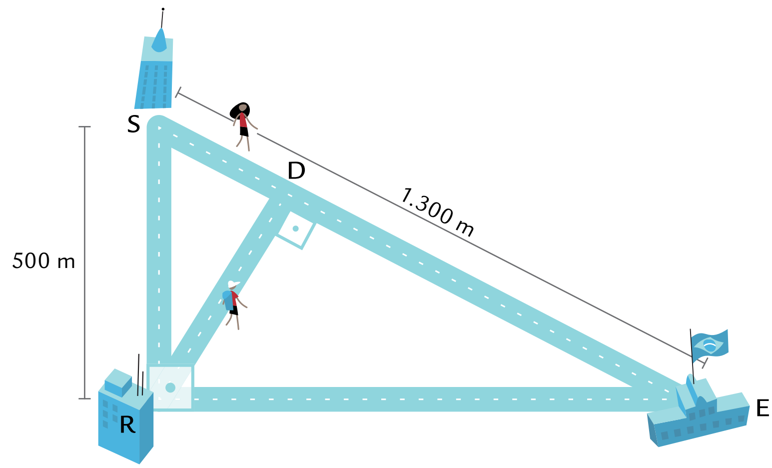
3. Uma das alturas de um triângulo retângulo determina sobre a hipotenusa segmentos com 18 cm e 32 cm. Calcule a medida da altura AH.



Relações bem construídas e saúde

Roberto e Sílvia são amigos desde crianças. Hoje, mesmo não morando muito perto um do outro, procuram conservar essa amizade, encontrando-se para ir à escola.

Para ter uma ideia, veja no esboço seguinte a casa de Roberto, que está no ponto R, e a de Sílvia, no ponto S.



No ponto E fica a escola na qual ambos estudam.
Os pontos R, S e E são vértices de um triângulo retângulo em que R é o vértice do ângulo reto.

A distância da casa de Roberto à casa de Sílvia é 500 m, e a distância da casa de Sílvia à escola é 1.300 m.

Eles se encontram na avenida SE no ponto D, que é o menor caminho da casa de Roberto a essa avenida.

a) A quantos metros da casa de Sílvia os dois amigos se encontram?

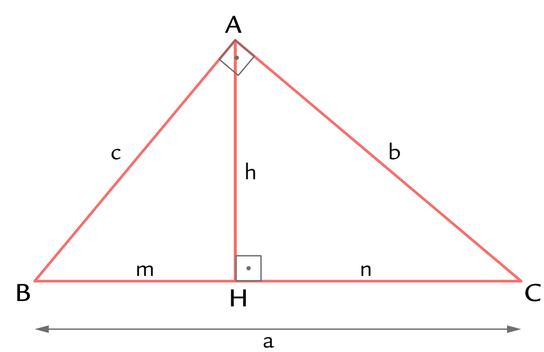
b) Quantos metros eles percorrem juntos?

Uma relação métrica: teorema de Pitágoras

Nas Unidades 1 e 2, você teve oportunidade de verificar experimentalmente o teorema de Pitágoras. Agora, com os conhecimentos sobre semelhança de triângulos retângulos, poderá demonstrar esse teorema de forma dedutiva. O método dedutivo valida e generaliza resultados experimentais particulares.

No triângulo retângulo ABC:

- AH é a altura relativa à hipotenusa BC;
- $\overline{BH}$ é a projeção ortogonal do cateto AB sobre a hipotenusa;
- $\overline{HC}$ é a projeção ortogonal do cateto AB sobre a hipotenusa.



As letras minúsculas indicam as medidas de cada um dos segmentos, todas na mesma unidade de medida.

1. Os triângulos ABC e ABH são semelhantes. Qual é a relação entre seus lados correspondentes? Use esse fato para demonstrar que $\mathbf{c^2 = a \cdot m}$.

2. Os triângulos ABC e AHC também são semelhantes. Da mesma forma que antes, demonstre que $\mathbf{b^2 = a \cdot n}$.

3. Adicionando membro a membro as duas igualdades seguintes, temos:

$$c^2 = a \cdot m$$
$$b^2 = a \cdot n$$
$$c^2 + b^2 = a \cdot m + a \cdot n$$

Fatore o segundo membro da última igualdade colocando o fator comum **a** em evidência:

____

4. Observe na figura que m + n = a. Atribua o valor dessa soma na última igualdade obtida na atividade **3** e observe com atenção a expressão obtida. Qual é a conclusão sobre ela?

____

5. Dois ciclistas, partindo de um mesmo local, pedalam em direções perpendiculares. Um dirigiu-se 15 km para o norte, o outro, 8 km para o leste. Qual a distância mínima que separa esses dois ciclistas?
Faça uma figura para ilustrar o problema proposto e resolva-o.

As pipas

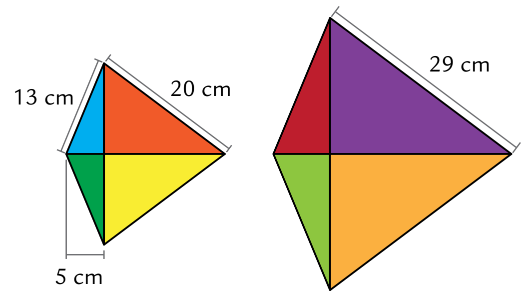
DICAS IMPORTANTES PARA EMPINAR PIPAS

- Solte pipa apenas em locais afastados da rede elétrica.
- Nunca use fios metálicos nem papel laminado para confeccionar a pipa. Eles são condutores de energia e podem causar choques fatais.
- Se a pipa ficar presa nos fios elétricos, não tente retirá-la.
- Não use cerol. Além do risco de ferir ou mesmo matar, o cerol costuma cortar os fios de alta e baixa tensão.
- Não jogue objetos na rede de energia elétrica, como arames, correntes e cabos de aço na tentativa de tirar uma pipa enroscada.
- Em caso de relâmpagos, recolha a pipa imediatamente.
- Não solte pipas em dias de chuva ou vento muito forte.
- Prefira pipas que não precisam de rabiola.
- Não suba em telhados, lajes, postes ou torres para recuperar pipas.

Fonte: Sindicato dos Eletricitários de São Paulo (Stieesp).

Cada pipa representada nas figuras a seguir é um quadrilátero formado por **quatro** triângulos, iguais dois a dois. A pipa maior é semelhante à outra. Para construir cada uma delas são usadas duas varetas perpendiculares nas diagonais do quadrilátero.

Quantos centímetros de vareta, no mínimo, devem ser usados para construir cada uma? Registre seus cálculos.



Pipa menor	Pipa maior

Sistemas de equações

1. A soma de dois números naturais é 30. Determine esses números, sabendo que a diferença entre o quadrado do maior e o dobro do menor é **300**.

a) Esse problema se parece com outro que você já fez? Por quê?

b) Quais os procedimentos que você pode usar? Em que ordem?

c) Por que você acha que esses procedimentos são adequados?

d) É possível traduzir o enunciado por meio de uma equação?

2. Compare sua resposta com a de Rodrigo.
Ele representou um número por **x**, e outro por **y**. Depois, escreveu o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x^2 - 2y = 300 \end{cases}$$

Pense em procedimento e resolva esse sistema.

3. Observe como Mariana e Rodrigo pensaram para resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x^2 - 2y = 300 \end{cases}$$

Mariana pensou em aplicar o método da substituição. Ela "isolou" o valor da variável **y** na primeira equação do sistema:

$$y = 30 - x$$

e, em seguida, substituiu **y** por essa expressão na outra equação:

$$x^2 - 2 \cdot (30 - x) = 300$$

a) Como você classificaria a última equação?

---

b) Resolva essa equação para obter um valor ou mais de um valor para **x**.

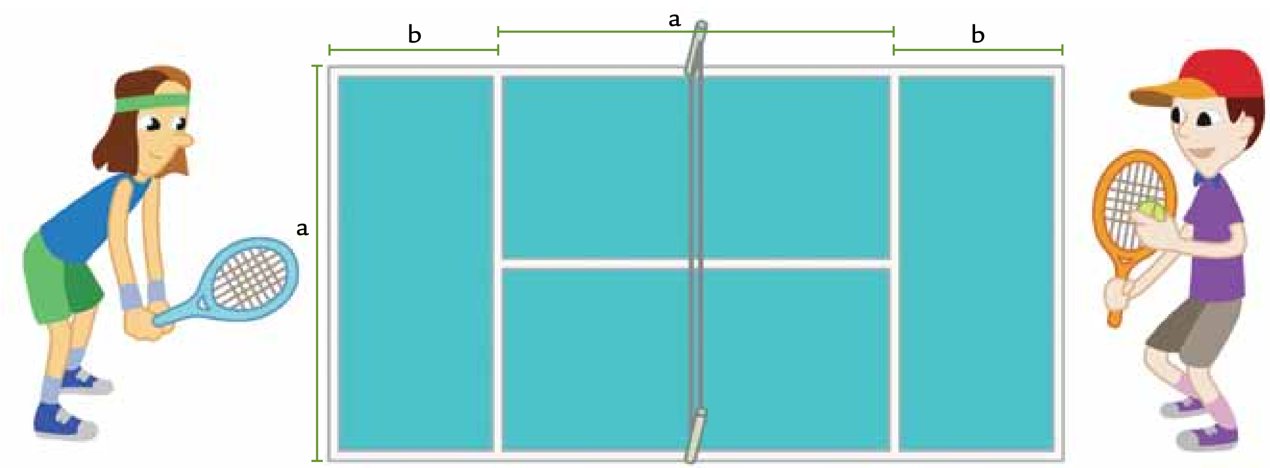
c) Atribua valores para **x** em uma das equações do sistema para obter valores para **y**.

d) Qual é a solução adequada ao problema proposto? Justifique sua resposta.

Quadra de tênis

Com um colega, discuta o problema seguinte:

Uma quadra de tênis tem a forma da figura abaixo, com perímetro de 64 m e área de 192 m^2. Quais são as medidas da quadra?



1. Escreva um sistema que represente as condições do problema.

2. Resolva esse sistema.

Saúde em números

Incapacidade funcional é entendida pela presença de dificuldade ou impossibilidade de desempenhar determinadas atividades básicas da vida cotidiana, como banhar-se, vestir-se, ir ao banheiro, alimentar-se e locomover-se.

O município de São Paulo apresenta as mais baixas taxas de predominância de incapacidade funcional do Brasil: 20,1% para mulheres e 15,8% para homens.

As taxas são menores também segundo os grupos de idade: 12,3% para os idosos entre 60 e 69 anos; 21,5% entre 70 e 79 anos; e 38,4% para pessoas com 80 anos ou mais.

Fonte: IBGE. Indicadores sociodemográficos e de saúde no Brasil, 2009.

1. Identifique a natureza dos números presentes no texto.

a) naturais: ______________________

b) inteiros: ______________________

c) racionais: ______________________

d) irracionais: ______________________

e) reais: ______________________

2. Escreva dois exemplos de números irracionais.

____

3. Considere o grupo de 60 a 69 anos.

a) Expresse algumas idades compreendidas nesse grupo.

____

b) Quantos números inteiros existem nesse grupo incluindo 60 e 69?

____

c) Quantos números racionais existem nesse grupo?

____

Relações entre os campos numéricos

Se **A** e **B** são nomes de conjuntos, então a expressão **A** $\subset$ **B** significa que todo elemento do conjunto **A** também é elemento do conjunto **B**.

1. Se $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais e $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros, então, o que significa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$?

2. Se $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais, então, o que significa a expressão $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$?

As relações entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ podem ser representadas por:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q},$$

isto é, todo número natural é número inteiro e todo número inteiro é número racional.

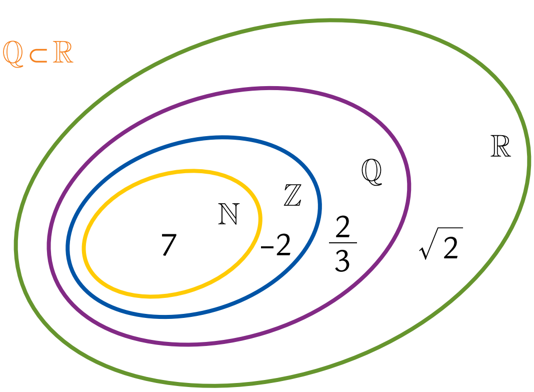
Como **nenhum** número racional é irracional (e vice-versa), então, se o conjunto dos números irracionais for representado por $\mathbb{I}$, conclui-se que:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \phi \text{ (conjunto vazio).}$$

O conjunto $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, reunião dos conjuntos dos números **racionais** e **irracionais**, denomina-se **conjunto dos números reais** e costuma ser representado por $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

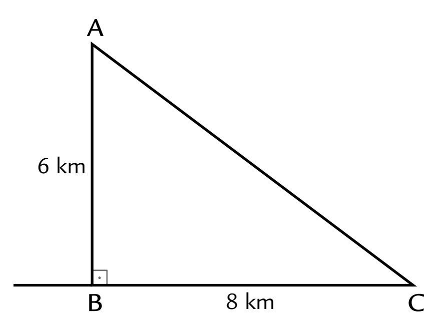
O diagrama ao lado ilustra essa relação:



Agora, é com você

1. Patrícia faz caixas para bijuterias em forma de cubo, com volume de 27 cm^3. Qual é a quantidade de papel em centímetros quadrados que Patrícia precisa, no mínimo, para construir cada uma dessas caixas?

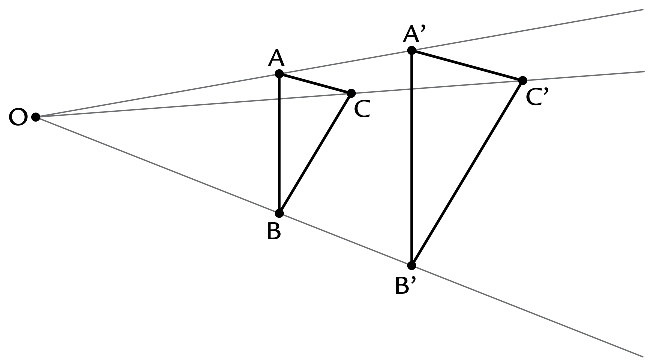
2. (Prova de Cidade, 2009) A distância entre as cidades A e B é de 6 km. A distância entre as cidades B e C é de 8 km. No mapa, os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares. Os prefeitos das cidades A e C concordaram em construir uma estrada em linha reta unindo as duas cidades. Qual será o comprimento, em quilômetros, dessa estrada?



3. (Saresp, 2005) A parte decimal da representação de um número segue o padrão de regularidade indicado: 0,12112111211112.... . Este número é:

- [ ] a) racional não inteiro
- [ ] b) inteiro negativo
- [ ] c) irracional negativo
- [ ] d) irracional positivo

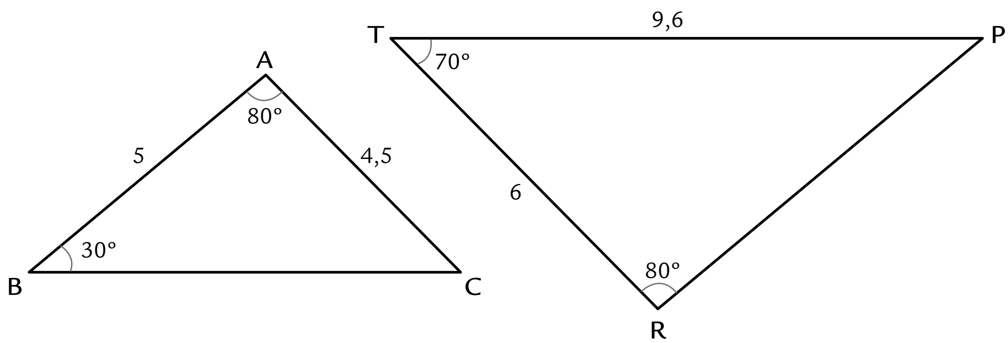
4. (Prova Brasil, 2008) Ampliando o triângulo ABC, obtém-se um novo triângulo A'B'C', em que cada lado é o dobro de seu correspondente em ABC.



Em figuras ampliadas ou reduzidas, os elementos que conservam a mesma medida são:

- [ ] a) as áreas
- [ ] b) os perímetros
- [ ] c) os lados
- [ ] d) os ângulos

5. (Saresp, 2008) Os triângulos representados nas figuras a seguir são semelhantes.

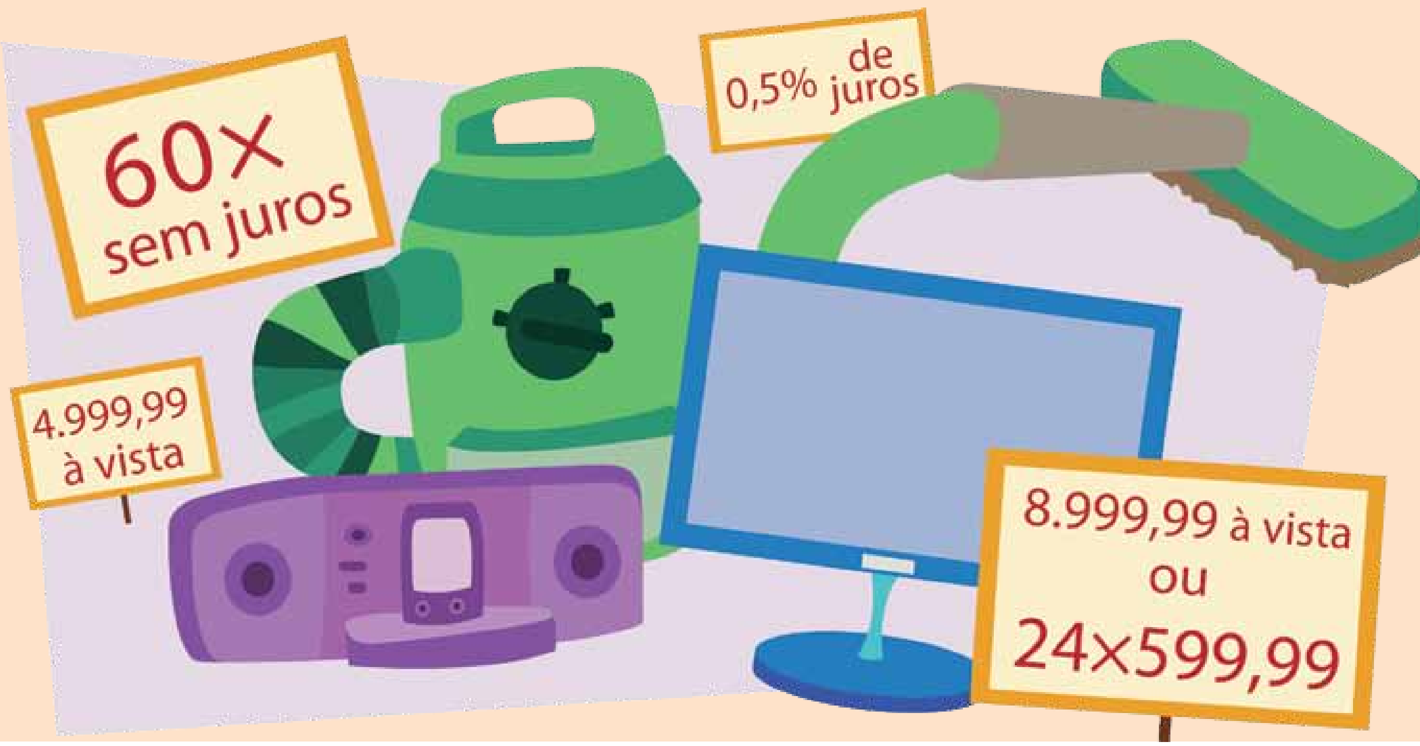


Os comprimentos aproximados dos lados BC e PR são dados, respectivamente, por:

- [ ] a) 3,75 e 7,2
- [ ] b) 7,2 e 6,7
- [ ] c) 9,7 e 8,2
- [ ] d) 5,4 e 12,8

UNIDADE 8

Aspectos ligados a direitos de consumidores podem necessitar de matemática para serem explicados e observados de outro ponto de vista, como os assuntos que estudaremos nesta Unidade: juro simples, variação de grandezas, noções de espaço amostral e de probabilidade de um evento.



Com colegas, prepare uma lista com alguns bens que você considera indispensáveis à vida diária.

____

____

____

Dependência entre grandezas


RENATA MELLO/PULSAR IMAGENS

Nas atividades do dia a dia de algumas pessoas, tais como engenheiros, economistas, cientistas, sociólogos, são utilizados diversos tipos de grandezas que se relacionam.

Em um laboratório, um químico mediu a temperatura de um líquido enquanto o aquecia.

O quadro seguinte mostra os resultados do experimento:

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	15	18	21	24	27	30

a) De que grandeza pode depender a temperatura do líquido?

b) Se a regularidade entre as duas grandezas envolvidas no quadro for mantida (a temperatura aumenta 3 °C por minuto), qual será a temperatura desse líquido após 6 minutos de aquecimento?

c) Observando a regularidade dos números do quadro, escreva uma frase para representar a correspondência entre eles.

d) Representando a temperatura pela letra **T** (maiúscula) e o tempo pela letra **t** (minúscula), descreva, por meio de uma equação, a relação existente entre a temperatura do líquido e o tempo correspondente.

Sonho de consumo?

A procura por carros populares varia de acordo com os preços de venda, o poder aquisitivo das pessoas, as facilidades de financiamento, as taxas de juro de mercado e as necessidades.

1. Em sua opinião, qual o fator que mais influencia as pessoas a comprar, ou não, um carro popular?

Se considerarmos que a grandeza **procura** ou **demanda** pelos carros populares **depende** explicitamente da grandeza **preço de venda**, então dizemos que a **procura** por carros populares está em **função** de seu **preço de venda**.

Se a grandeza preço de venda varia, por diversos motivos, então se espera que a grandeza procura ou demanda pelos carros populares também varie.

2. Imagine que, para cada aumento de R$ 500,00 no preço de venda de um carro popular, a procura por ele se reduza cerca de 50 unidades por mês. Suponha, agora, que a demanda por um carro popular foi de 230 unidades em determinado mês, quando era vendido por R$ 20.000,00.
Estime as demandas por esse tipo de carro popular se seu preço de venda sofrer aumentos sucessivos de R$ 500,00 daqui a um mês, dois meses, três meses.

Consumo *versus* consumismo

1. Analise as características seguintes e assinale aquelas que você acha que dizem respeito a um consumista.

- [ ] Ir às compras é o passatempo preferido.
- [ ] Qualquer objeto comprado há mais de um ano, desde um relógio até um automóvel, torna-se velho e ultrapassado, e precisa ser trocado com urgência.
- [ ] Antes de comprar, analisa se realmente precisa do produto.
- [ ] Compara a finalidade do produto com seu preço.
- [ ] Faz sempre pesquisa de preços.
- [ ] Se sente inferiorizado quando algum parente ou amigo aparece com um objeto mais moderno, mais atual, mais caro.
- [ ] Avalia o produto por seus aspectos externos, como embalagem, desenho, entre outros.
- [ ] Leva em conta apenas o preço, a quantidade e a qualidade do artigo.

Dados obtidos em: Instituto Akatu. Disponível em: <www.akatu.org.br>.

2. Aponte uma diferença entre consumo e consumismo.

____

____

____

3. Um consumidor comprou um automóvel por R$ 30.000,00 e constatou que, no final de cada ano de uso, o valor do veículo correspondia a 90% de seu valor de um ano antes.

a) Complete o quadro a seguir com o valor de mercado até o final do segundo ano.

Tempo **t** de uso do automóvel (ano)	Valor **V** de mercado (R$)
0	30.000,00
1	$0{,}9 \times 30.000{,}00 =$ ______
2	$9 \times$ ______ $= 0{,}9 \times (0{,}9 \times 30.000{,}00) =$ $= (0{,}9)^2 \times 30.000{,}000 =$ ______

b) Determine o valor do automóvel ao final de três anos e ao final de **t** anos.

c) Anotando com **V** o valor de mercado desse tipo de automóvel e com **t** os anos de uso, obtenha uma equação que relacione **t** e **V**.

____

d) Nessa equação, que valor de **V** corresponde a t = 2?

____

e) Qual valor de **t** para V = 30.000?

____

f) O valor **V** de mercado do automóvel é função do tempo **t** de uso? Por quê?

____

Consumo de sucos

O consumo de sucos à base de frutas é ainda baixo no Brasil, mas está crescendo significativamente.

De 2007 a 2008 o mercado dessas bebidas expandiu-se o dobro do mercado de refrigerantes, segundo a Associação Brasileira de Refrigerantes e Bebidas Não Alcoólicas.

De olho nesse mercado, a partir do ano 2005, uma pequena indústria de sucos de frutas começou a estimar sua produção anual por meio da expressão:

$$P = 10 + 1{,}5 \cdot (a - 2005)$$

em que a variável **P** representa a grandeza produção de sucos, em milhões de litros, e a variável **a** expressa o "ano" em que se atingirá a produção **P**.
A expressão é válida até **2020**.

1. Qual foi a produção dessa indústria em 2005?

2. Com essa expressão, o dono da indústria pôde prever a produção anual de suco para os anos seguintes. Para estimar as produções anuais, complete a tabela:

Ano	Produção em 2005 (milhões de litros)	Aumento (em milhões) na produção no ano	Produção anual (milhões de litros) no ano
2005		$1{,}5 \cdot (2005 - 2005) = 0$	$P = 10{,}0 + 0 = 10{,}0$
2006	10,0	$1{,}5 \cdot (2006 - 2005) = 1{,}5$	$P = 10{,}0 + 1{,}5 = 11{,}5$
2007	10,0	$1{,}5 \cdot (\_\_\_\_ - 2005) = \_\_\_\_$	$P = 10{,}0 + \_\_\_\_ = \_\_\_\_$
2008	10,0		
2009	10,0		
2010	10,0		
2011	10,0		
⋮	⋮	⋮	⋮
2020	10,0		

3. Analise a tabela preenchida para responder às questões:

a) Em que ano a produção de sucos de frutas atinge 17,5 milhões de litros?

____

b) A partir de que ano a produção de sucos de frutas superará o dobro da produção de 2005? ____________________________

c) Como se comporta a grandeza representada por **P** quando os valores atribuídos a **a** crescem?

____

4. Ainda segundo a Associação Brasileira de Refrigerantes e Bebidas Não Alcoólicas, apesar de a expansão das bebidas à base de frutas ter aumentado, seu consumo ainda é bem menor que o consumo de refrigerantes.
Aponte qual, em sua opinião, é um fator importante na decisão de compra do consumidor.

____

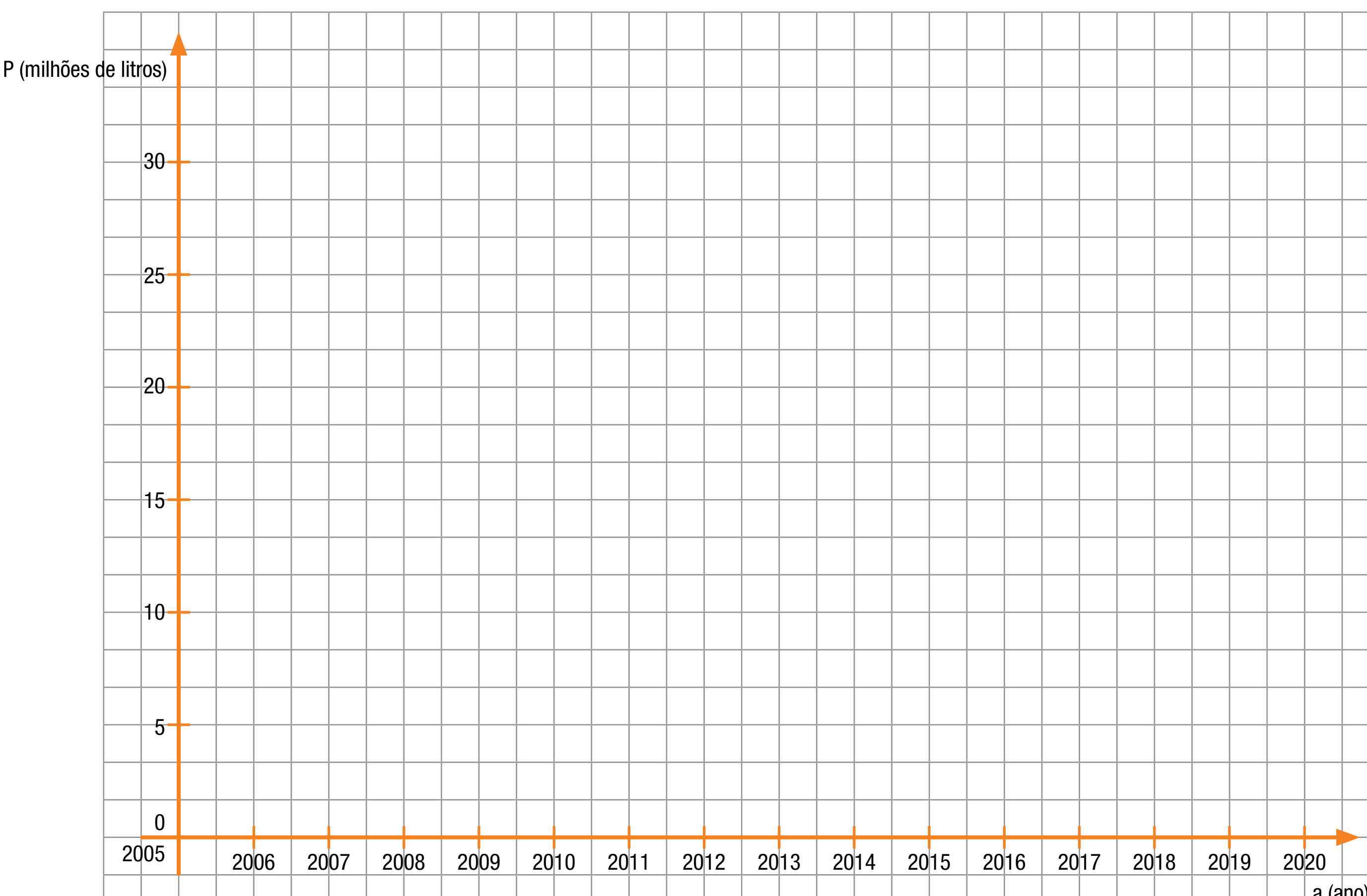
BEL PEDROSA/FOLHAPRESS

Representação gráfica

Para representar geometricamente a expressão:

$$P = 10 + 1{,}5 \cdot (a - 2005)$$

que possui **duas** variáveis, **P** e **a** (representando duas grandezas), utilizamos dois eixos perpendiculares, um para cada grandeza. Veja o gráfico.

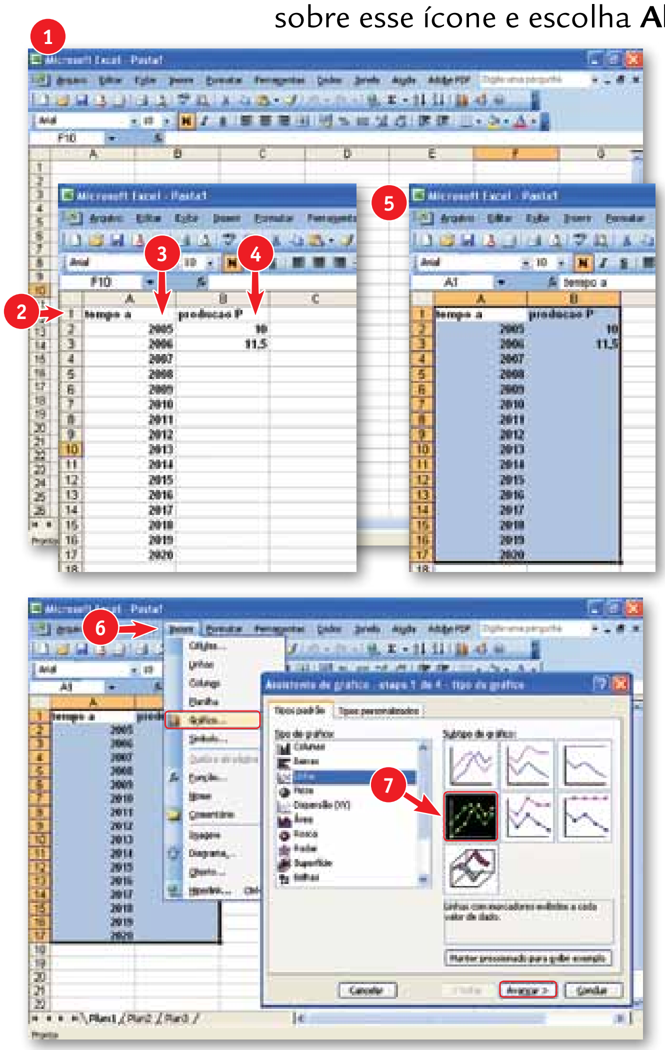


Use as informações da última tabela (página 231) e represente os pares ordenados (tempo, produção) por pontos do sistema de eixos cartesianos.

Uma planilha eletrônica

O gráfico proposto na página 232 pode ser elaborado na planilha Excel™, do sistema Windows™, seguindo as etapas:

1. Na página inicial do Windows™, clique duas vezes com o botão esquerdo do *mouse* sobre o ícone do Excel; ou um clique com o botão direito do *mouse* sobre esse ícone e escolha **Abrir**. Surge uma planilha vazia.



2. Na linha **1**, coluna **A**, digite **tempo a** e, na coluna **B**, digite **produção P**.

3. Na coluna **A**, da linha **2** à linha **17**, digite: **2005**; **2006**; **. . .**; **2020**.

4. Na coluna **B**, da linha **2** à linha **17**, digite os valores correspondentes das produções (há procedimentos práticos para isso na página 235).

5. Para selecionar as colunas **A** e **B**, da linha **1** (ou **2**) à linha **17**, pressione o botão esquerdo do *mouse* sobre a célula **A1** (ou **A2**), mantenha-o pressionado até a célula **B17**.

6. Dê um clique com o botão esquerdo sobre a ficha **Inserir** e escolha a opção **Gráfico**. Surge, então, o **Assistente de gráfico**.

7. Na etapa 1, escolha as opções: **Linha**, Avançar.

8. Na etapa 2, escolha: **Intervalo de dados**, **colunas**, Série.

9. Na opção: **Rótulos do eixo das categorias (X)**, digite: “=Plan1!$A$2:$A$17” (sem as aspas) e clique sobre as opções Remover e Avançar.

10. Na etapa 3, escolha: Concluir.

11. Se for conveniente, modifique a aparência do gráfico obtido.

Consumidora consciente

Ana só compra produtos de que está precisando. Procura aqueles que não prejudicam a natureza e pesquisa os melhores preços.

Planeja antecipadamente e aproveita as promoções de final de estação. Em uma dessas promoções, as blusas eram vendidas com 30% de desconto sobre o preço normal.

1. Represente por **V** o valor a ser pago após o desconto sobre o preço de venda normal **P** das blusas.

2. Construa em um sistema de eixos cartesianos um gráfico correspondente a essa situação.

3. Que quantia Ana gastará se comprar, para suas filhas, 5 blusas que normalmente custam, cada uma, R$ 20,00?

Gráficos e planilha

O gráfico da página 232 também pode ser elaborado na planilha Excel conforme, por exemplo, as seguintes etapas modificadas:

ETAPA 1. A mesma já exibida na página 233.

ETAPA 2. Na coluna **A**, linha **1**, digite: “preço P” (sem as aspas) e, na coluna **B**, linha **1**, digite: “valor V” (sem as aspas).

ETAPA 3. Na coluna **A**, da linha **2** à linha **52**, serão introduzidos os preços de **0** a **50** reais.

Para não ter de digitar todos esses preços, um por um, acompanhe estes procedimentos:

1. Selecione o menu **Editar** e as opções: **Preencher** e **Série**.

2. Na janela **Série** digite: **1** em **Incremento:**, **50** em **Limite:**, clique em **Colunas** (caso essa opção não esteja selecionada) e em OK.

ETAPA 4. Na coluna **B**, da linha **2** à linha **52**, serão introduzidos os valores correspondentes. Para não ter de digitar todos esses **51** valores, acompanhe estes procedimentos:

1. Digite na célula **B2** a fórmula: “=0,7*a2”, ou “=0,7*A2” (sem aspas).

2. Com a célula **B2** selecionada, pressione, simultaneamente, as teclas Ctrl e C (para copiar). Com isso a célula **B2** fica parecida com 0.

3. Com o ponteiro sobre 0, pressione o botão esquerdo do *mouse*, mantenha-o pressionado e selecione todas as células de **B2** a **B52**.

4. Sobre essa seleção, pressione, simultaneamente, as teclas Ctrl e V (para colar). Com isso, elas estarão preenchidas com os valores de **V**.

ETAPAS 5, 6, 7, 8, 9 e 10. As mesmas já mencionadas na página **233**.

ETAPA 11. Se for conveniente, modifique a aparência do gráfico obtido.

Corridas de táxis

Henry e Severino são dois executivos que moram em São Paulo e utilizam táxi no dia do rodízio de seus carros.

Severino usa táxis de luxo e Henry, táxis comuns, para percorrer uma distância de **25** quilômetros.

Para táxis de luxo, a bandeirada é R$ 5,25 e o quilômetro rodado custa R$ 4,10 (bandeira 2).

Para táxis comuns, a bandeirada é R$ 3,50 e o quilômetro rodado custa R$ 2,10 (bandeira 1).

1. As duas equações seguintes relacionam, cada uma, duas grandezas: valor da corrida e quilometragem.

$$\begin{cases} \text{valor da corrida de táxi de luxo} = 5{,}25 + 4{,}10 \times \text{quilometragem} \\ \text{valor da corrida de táxi comum} = 3{,}50 + 2{,}10 \times \text{quilometragem} \end{cases}$$

a) Qual é o preço da corrida para cada um deles?

b) Existe alguma quilometragem para a qual os valores das corridas são iguais?

2. Reescreva as equações da atividade 1. Represente nelas a grandeza valor corrida de táxi de luxo pela variável **L**, a grandeza valor corrida de táxi comum pela variável **C** e a grandeza quilometragem pela variável **q**.

3. Existem valores para a variável **q** para os quais os valores das variáveis **L** e **C** são iguais? ______________________________

a) Se existirem, então quais podem ser eles?

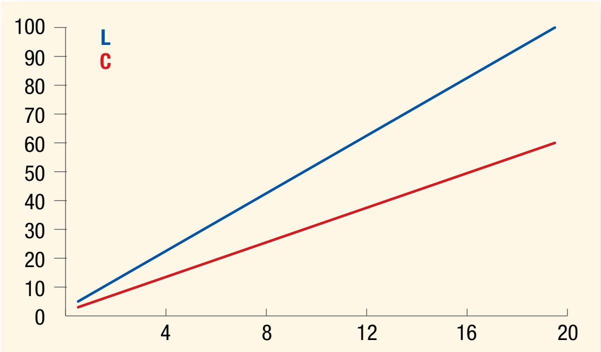
____

b) Será que a solução encontrada é adequada ao problema proposto? Por quê?

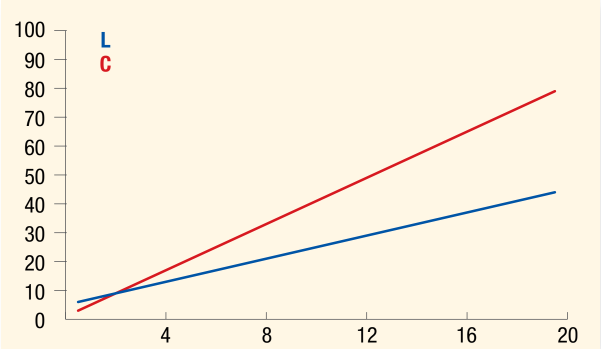
____

4. Qual dos gráficos a seguir representa "melhor" as expressões dos dois tipos de táxi?

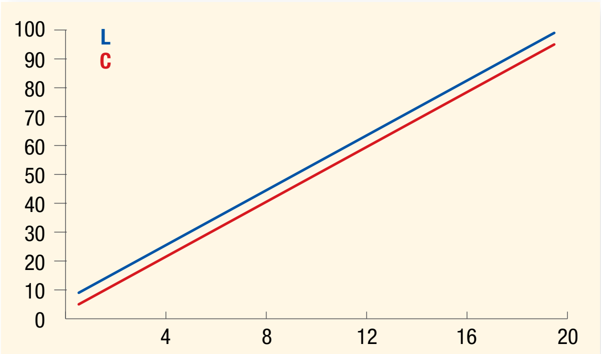
☐ a)



☐ b)



☐ c)



Variações do perímetro de um quadrado

1. Complete o quadro com medidas dos lados de alguns quadrados e seus perímetros correspondentes.

Lado (cm)	1	2	3	▯	4	7,5	$\sqrt{50}$	$8,\overline{3}$
Perímetro (cm)								

2. Escreva uma expressão algébrica que relaciona o perímetro **P** de um quadrado com a medida **a** de seus lados.

3. Se você tivesse dois quadrados de modo que os lados de um deles medissem o dobro dos lados do outro, qual seria a relação entre o perímetro do quadrado maior e o do menor?

4. Represente graficamente a expressão do perímetro de um quadrado com base em alguns valores do quadro acima.

5. Os pontos do gráfico que você desenhou estão alinhados?

6. É conveniente, ou adequado, unir os pontos desse gráfico? Por quê?

Variações da área de um quadrado

1. Escreva uma fórmula que expresse a área **A** de um quadrado em função da medida **c** de seus lados.

---

2. Preencha o quadro para alguns valores de **A** e **C**.

c (cm)	1	2				□	7,5	$\sqrt{50}$	$8,\overline{3}$
A (cm^2)	1		25	121	256				

3. Observe o quadro preenchido e responda às questões a seguir.

a) Que valor de **c** corresponde a A = 121 cm^2?

---

4. Se a medida dos lados de um quadrado é o dobro da medida dos lados de outro quadrado, a área do primeiro também será o dobro da área do segundo? Justifique sua resposta.

---

5. Quantas vezes maior torna-se o valor de **A**, se multiplicarmos o valor de **c** por 5?

Direitos do consumidor

Leia alguns direitos básicos do consumidor, protegidos pela Constituição:

- Antes de comprar um produto ou utilizar um serviço, o fornecedor deve avisá-lo dos **possíveis riscos** que o produto ou serviço podem oferecer à sua saúde ou segurança.
- Ao adquirir um produto com o prazo de validade vencido, ou modificado, informe ao fornecedor. **Provavelmente**, ele retirará o produto.
- Guarde a nota fiscal até lavar a roupa pela primeira vez, quando é grande a **chance** de aparecer a maioria dos defeitos.

As palavras "chance", "risco", "provável" são usadas para descrever as possíveis ocorrências de um acontecimento.

Há muitas situações como essas que podem ser classificadas como imprevisíveis: não podemos dizer, com certeza, que resultado vai ocorrer. Da mesma forma, há experimentos dos quais não se pode prever, com certeza, o resultado que será obtido ao realizá-los: são os experimentos aleatórios.

1. Um desses exemplos é o lançamento de uma moeda. Supondo que a moeda não permanecerá apoiada em sua borda, qual face ficará para cima?

___

2. Representando o acontecimento "sair cara" por **c** e "sair coroa" por **r**, qual é o conjunto de seus resultados possíveis?

___

Um conjunto como esse é denominado **espaço amostral**.

3. Ao fazermos um experimento, podemos estar interessados em certos eventos (acontecimentos) que podem ser descritos verbalmente ou por meio de um conjunto.

O acontecimento "obter cara" é um evento desse experimento.

Descreva outro evento desse experimento. ___

Se um evento tem apenas um elemento, dizemos que é simples.

Experimentos aleatórios

1. Joga-se um dado comum e observa-se a face de cima.

a) Ao lançarmos um dado comum, se indicarmos a ocorrência da face ⚀ por **1**, da face ⚁ por **2**, da face ⚂ por **3**, e assim por diante, quais são os resultados individuais possíveis?

b) Qual é o espaço amostral que descreve esse experimento aleatório?

c) Quantos elementos possui esse espaço amostral? ____________________

2. Uma caixa contém 4 bolas: 2 bolas vermelhas e 2 brancas. São retiradas 2 bolas dessa caixa, sem reposição.

a) Complete o quadro com todas as possíveis maneiras de tirar duas bolas:

1ª bola	2ª bola	Resultados possíveis
branca	branca	branca, branca
branca	vermelha	

b) Descreva o espaço amostral associado a esse experimento.

____

c) Quais os elementos do evento “obter 2 bolas de mesma cor”?

____

Estimativa de probabilidades

Em casos em que podem existir vários resultados possíveis, nossa intenção é estimar as chances de ocorrência de cada um deles. Um modo de obter uma estimativa é fazer experimentos.

Forme um grupo com alguns colegas e realize o experimento descrito a seguir.

1. Cada componente lança um dado comum, por exemplo, 20 vezes.

2. Registrem os resultados obtidos no quadro:

Evento	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Frequência absoluta*						

**Frequência absoluta de um evento é o número de vezes que esse evento se repete.*

3. Como os outros grupos também realizaram o experimento, reúnam todos os resultados em um único quadro.

4. Para estimar a probabilidade da ocorrência de cada evento simples (1, 2, 3, 4, 5 ou 6), determine, para cada um desses eventos, a razão entre sua frequência absoluta e o número total de lançamentos do dado. Cada uma dessas razões se denomina **frequência relativa** do evento.

Preencha o quadro com os resultados obtidos pelos grupos:

Evento	Frequência absoluta	Frequência relativa
⚀		
⚁		
⚂		
⚃		
⚄		
⚅		
Total		

Eventos equiprováveis

Idealmente espera-se que você conclua que a probabilidade de ocorrer 5, por exemplo, no lançamento de um dado comum, ou de qualquer evento simples, seja $\frac{1}{6}$, ou **16,6666...%**.

1. Mas, por que **16,6666...%** e não, por exemplo, **17%**, ou **16,7%**?

Uma razão para isso consiste no fato de que os eventos simples do experimento “lançar um dado” têm todos eles a mesma chance de ocorrer, ou seja, esses eventos são **equiprováveis**.

2. Explique o que você entende por **eventos equiprováveis**.

---

3. Para uma resposta à atividade 1, acompanhe os argumentos seguintes:

- Como os eventos individuais são equiprováveis, então podemos afirmar que cada um deles tem a mesma possibilidade de ocorrer quando o dado é lançado, ou seja, a probabilidade de ocorrer **1** é igual à probabilidade de ocorrer **2**, que é igual à probabilidade de ocorrer **3** e assim por diante.
- A soma de todas as probabilidades dos eventos unitários deve ser igual a 100%, ou 1.

a) Se a probabilidade de cada evento simples for representada por **p**, qual é a soma das probabilidades de ocorrer **1**, ou **2**, ou **3**, ou **4**, ou **5**, ou **6**, no lançamento de um dado “equilibrado”?

$p + p + p + p + p + p =$ ____________________

b) Conclua, a seguir, que a probabilidade **p** é igual a $\frac{1}{6}$ = 16,6666...%.

Concessão de crédito ao consumidor

Quando você compra à prestação, utilizando, ou não, os serviços de uma financeira, o fornecedor tem a obrigação de informar: o preço do produto ou serviço em moeda nacional, os valores dos juros de mora e a taxa de juros do financiamento; os acréscimos previstos por lei; a quantidade e a data de vencimento das prestações; o total a ser pago à vista, ou financiado.

Artigo 52 do *Código de Defesa do Consumidor*.

Nesse artigo são empregados alguns conceitos matemáticos aplicados em problemas financeiros.

1. É possível que você já tenha lido em jornais, anúncios de propaganda, situações em que aparecem alguns desses conceitos. Destaque três.

---

2. Em 1º de julho de 2010, uma instituição financeira concedeu a Antônio um crédito no valor de R$ 12.000,00.
A dívida seria paga no dia 1º de agosto do mesmo ano, da seguinte forma: R$ 12.000,00, mais R$ 1.800,00.

Qual será o total pago em 1º de agosto?

Essa situação contém alguns conceitos importantes:

- o valor R$ 12.000,00 denomina-se **capital**;
- o total a ser pago em 1º de agosto denomina-se **montante;**
- o tempo do empréstimo (um mês, neste caso) denomina-se **tempo de aplicação**;
- o valor R$ 1.800,00 é o **juro** pago pelo empréstimo.

Regime de capitalização sob juro simples

André é daqueles que evitam o consumismo para alcançar uma vida financeira mais saudável.

Sempre que pode faz algumas economias.

1. André juntou R$ 10.000,00, que foram aplicados em uma instituição financeira sob o regime de juro simples, em 2 de janeiro de 2010, a uma taxa de 0,5% ao mês.

a) Um mês depois do depósito inicial de R$ 10.000,00, a instituição depositou na conta dele 0,5% de R$ 10.000,00.
Quanto foi depositado pela instituição financeira na conta de André?

b) Qual era o saldo de André após 1 mês? ______________________

c) Passado o segundo mês do depósito inicial, a instituição depositou novamente 0,5% de R$ 10.000,00.
Qual passou a ser o saldo de André após os dois meses?

d) Passado o terceiro mês do depósito inicial, a instituição depositou novamente 0,5% de R$ 10.000,00.

Saldo após três meses = ______________________________

e) Com base nos últimos resultados, obtenha o saldo de André após quatro meses do depósito inicial.

Saldo após quatro meses = ______________________________

f) Como você faria para calcular o saldo de André um ano após o depósito inicial de R$ 10.000,00?

2. Veja como um gerente da instituição explicou a André como calcular o saldo após 12 meses economizando tempo e energia.

- No final do primeiro mês, a instituição depositou em sua conta R$ 50,00, que representam 0,5% de R$ 10.000,00.

- No final do segundo mês, depositou mais R$ 50,00, ou seja, 2 × 50, ou 2 × 0,5% × 10.000.
- No final do terceiro mês, mais R$ 50,00, ou seja, 3 × 50, ou 3 × 0,5% × 10.000.
- No final de um ano (12 meses), o banco terá depositado 12 × 50 reais na conta de André, ou seja, 12 × 0,5% × 10.000. Logo:

Saldo (após 1 ano, ou 12 meses) =

fator comum fator comum em evidência

$$= 10.000 + 12 \times 0{,}5\% \times 10.000 = 10.000 \times (1 + 12 \times 0{,}5\%) =$$

$$= 10.000 \times (1 + 12 \times 0{,}005) = 10.000 \times (1 + 0{,}06) =$$

$$= 10.000 \times 1{,}06 = 10.600.$$

Portanto, no final de um ano o banco terá depositado R$ 600,00 na conta de André.

a) Calcule o saldo de André dois anos após o depósito inicial.

Saldo após dois anos = ______________________________

A regra que acabou de ser usada nessa situação tem o nome **regime de capitalização sob juro simples**.

Como esse nome é muito comprido, essa regra será identificada pela expressão **juro simples**.

b) Qual quantia de juro simples André recebeu, referente ao período de dois anos? ______________________________

Uma generalização

Vamos um pouco mais longe no problema de André propondo a você uma generalização. O começo é o mesmo.

Saldo (após um ano, ou 12 meses) =

$= 10.000 + 12 \times 0{,}5\% \times 10.000 = 10.000 \times (1 + 12 \times 0{,}5\%) = 10.600$ reais

Saldo (após dois anos, ou 24 meses) =

$= 10.000 + 24 \times 0{,}5\% \times 10.000 = 10.000 \times (1 + 24 \times 0{,}5\%) = 11.200$ reais

a) Qual será seu saldo após três anos?
Saldo (após três anos, ou 36 meses) =

b) Faça uma generalização dessa regra calculando o saldo após um número qualquer de meses, que representaremos pela letra **n**.
Saldo (após **n** meses) =

Em geral, se você quiser pedir um empréstimo, ou fazer uma aplicação financeira no sistema financeiro brasileiro, o regime utilizado **não é o de juro simples**, mas o de **juro composto**, como você verá mais adiante (página 253).

Duas vezes sem juros

Todo dia, quando vai ao trabalho, Rosa passa em frente a uma loja de eletrodomésticos que oferece um televisor pelo preço de R$ 2.000,00.

A loja oferece esse televisor em duas parcelas mensais iguais "sem juros". A primeira deve ser paga um mês após a compra e a segunda, dois meses após a compra.

Rosa tem, por enquanto, R$ 1.985,11, valor que não permite a ela comprar aquele televisor à vista.

As dúvidas que surgem são as seguintes:

- Rosa poderá comprar aquele televisor com o dinheiro que possui atualmente se o aplicar em alguma instituição financeira que "capitalize" a aplicação sob regime de **juro** a uma taxa de **0,5%** ao mês?
- Existe realmente algum plano de pagamento "sem juro"?

Para que você possa enfrentar os desafios propostos, pense nos seguintes procedimentos:

- Rosa deixa seu dinheiro atual (R$ 1.985,11) "rendendo" por um mês e, no final desse primeiro mês, retira R$ 1.000,00 para pagar a primeira parcela do financiamento.
- Rosa deixa o restante de seu dinheiro "rendendo" por mais um mês. Será que no final desse segundo mês Rosa terá R$ 1.000,00 para pagar a segunda parcela do financiamento?

Registre seus argumentos.

Qual é a "moral" dessa história?

Não se deixe enganar

Você já se viu em uma situação parecida com a de Rosa na qual tem de decidir pelo pagamento à vista ou pelo parcelamento?

Veja o que aconteceu com Marcelo, que pretendia comprar um *skate* e encontrou o seguinte anúncio em um jornal:

Marcelo, entusiasmado, disse a seu pai:

— Se eu comprar a prazo pagarei R$ 276,00 + 2 × R$ 225,00, que é igual a R$ 726,00. O aumento será de R$ 126,00, que é 21% de 600. Dividindo essa taxa em duas vezes dá **10,5%** ao mês!

Você concorda com esse raciocínio de Marcelo?

— Esse é o cálculo do senso comum. Você está enganado, meu filho. Vou lhe mostrar.

a) No ato da compra sua dívida já é de R$ 600,00. Como você dará R$ 276,00 de entrada, então, qual será sua nova dívida após o pagamento da entrada?

b) A “nova” dívida de Marcelo no ato do pagamento de cada parcela será igual a sua dívida (quanto falta para quitar a dívida) mais o juro mensal que esse débito produz em um mês.

Se representarmos a taxa mensal de juro por **i** (**i** é a primeira letra da palavra inglesa *interest*, que significa **juro**), então, qual será a dívida de Marcelo no ato do pagamento da primeira parcela mensal?

Após o pagamento da primeira parcela mensal, qual será a “nova” dívida de Marcelo?

c) Qual será dívida de Marcelo no ato do pagamento da segunda parcela mensal?

Após o pagamento da segunda parcela mensal, qual será a “nova” dívida de Marcelo?

d) Além disso, após o pagamento da segunda parcela mensal, a dívida de Marcelo também será igual a **zero**, pois ele já terá quitado sua dívida com a empresa que financiará a compra.

Portanto, para determinar a taxa mensal de juro utilizada pela instituição financeira, resolva a seguinte equação do 2º grau:

$$324 \cdot i^2 + 423 \cdot i - 126 = 0, \text{ ou } 36 \cdot i^2 + 47 \cdot i - 14 = 0$$

e) Qual é a solução adequada para representar a taxa de juro? Justifique sua resposta.

Conclusão: Se Marcelo já possuir **R$ 600,00** para pagar à vista o *skate*, então seu financiamento de acordo com o plano proposto só será conveniente se ele puder aplicar o dinheiro em alguma instituição financeira com rendimento igual a **25%** ao mês ou maior. Se sua aplicação render **25%** ao mês, então a compra à vista e a financiada serão equivalentes.

Se sua aplicação render menos que 25% ao mês, então não é financeiramente vantajoso comprar a prazo. Ele deve comprar dessa forma somente se for necessário.

Caderneta de poupança

Se você sabe como funcionam as cadernetas de poupança, então compartilhe seus conhecimentos e explique para seus colegas:

____

____

Se não conhece, acompanhe as propostas seguintes.

Em primeiro lugar, veja os valores das **taxas porcentuais** diárias (nos dez primeiros dias) de rendimento das cadernetas de poupança, referentes ao ano de 2009 até o mês de julho.

Dia	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho	Julho
1	0,8627	0,9902	0,9137	0,8801	0,9205	0,9673	0,9187
2	0,8560	0,9936	0,9137	0,9195	0,8755	0,9488	0,9695
3	0,8051	0,9222	0,9137	0,9689	0,8703	0,9553	0,9740
4	0,8668	0,9305	0,8571	1,0183	0,8428	1,0035	0,9787
5	0,8032	0,9762	0,8055	1,0482	0,7949	1,0599	0,9782
6	0,7708	1,0211	0,8040	1,0415	0,8349	1,0721	0,9199
7	0,7737	1,0209	0,8010	0,9951	0,8767	1,0667	0,8743
8	0,8121	1,0157	0,8100	0,9851	0,8905	1,0190	0,9233
9	0,8536	0,9532	0,8100	1,0363	0,8862	0,9666	0,9655
10	0,8496	0,9074	0,8193	1,0767	0,8606	0,9734	0,9755

Imagine que você tenha aberto uma caderneta de poupança no dia 10 de janeiro de 2009 com um depósito de R$ 500,00.

Utilize a calculadora para fazer os cálculos.

a) No dia 10 de fevereiro de 2009, a taxa de rendimento das cadernetas de poupança foi de **0,9074%** (veja a interseção da coluna “fevereiro” com a linha “10”).

Qual será seu saldo naquele dia?

Saldo (10/2/2009) =

= saldo (10/1/2009) + 0,9074% do saldo (10/1/2009) =

b) Calcule seu saldo no dia 10 de março de 2009 utilizando os mesmos procedimentos anteriores.
Localize a taxa de juro desse dia na interseção da coluna “março” com a linha “10”).

c) Calcule os saldos nos meses subsequentes até 10 de julho de 2009.

O regime de capitalização utilizado nas cadernetas de poupança não é o regime de capitalização simples.

A diferença entre o regime de juro simples e o regime de juro composto está no fato de que o rendimento da aplicação deste é calculado sobre o saldo do último período e não sobre o capital inicial (exceto no final do primeiro período).

Esse regime é chamado de **regime de capitalização composta** (juro composto).

Agora, é com você

1. Uma corretora de imóveis recebe mensalmente um salário composto por duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 600,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 2% do total de vendas que ela faz durante o mês.

a) Escreva uma expressão que represente o salário dessa corretora de imóveis.

b) Calcule o salário dessa corretora sabendo que durante um mês ela vendeu um apartamento por R$ 200.000,00.

2. Mauro emprestou a seu filho R$ 20.000,00, a uma taxa de juro simples de 35% ao ano. Após dois anos de empréstimo, quanto ele receberá de juro?

3. Uma caixa contém duas bolas brancas e uma bola preta. Retirando uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de obter:

a) uma bola branca? ________________________________

b) uma bola preta? ________________________________

4. (Saresp, 2005) A tabela abaixo dá o preço de bolinhos de bacalhau em gramas, vendidos na fábrica.

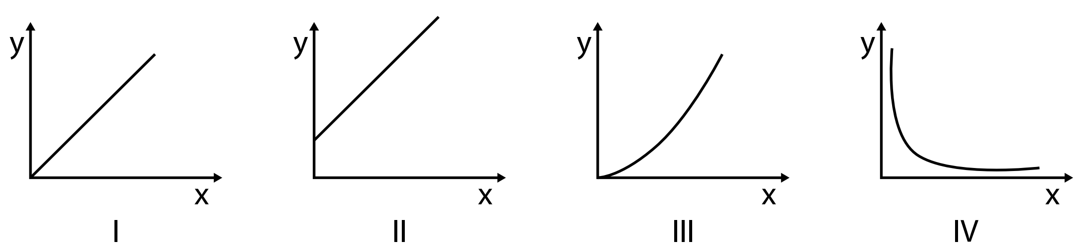
Peso (em gramas)	Preço (em reais)
100	3,60
200	7,20
250	9,00
300	10,80
400	14,40
500	18,00

A expressão que representa a quantia (P) a ser paga em reais, em função do peso (x) de bolinhos comprados em **quilogramas**, é:

☐ a) $P = 0{,}36 \cdot x$ ☐ b) $P = 3{,}6 \cdot x$ ☐ c) $P = 36 \cdot x$ ☐ d) $P = 18 \cdot x$

5. (Saresp, 2005) Observe os gráficos abaixo:

O gráfico que representa a variação da área (y) de um quadrado em relação à variação de seu lado (x) é:



☐ a) I ☐ b) II ☐ c) III ☐ d) IV

6. (Prova da Cidade, 2009) Uma caixa contém 30 bombons que só são diferentes pelo sabor. Doze são de coco, 6 de morango, 8 de uva e 4 de banana. Retira-se ao acaso um desses bombons da caixa. Qual é o sabor desse bombom com maior chance de ser retirado da caixa?

☐ a) banana ☐ b) coco ☐ c) morango ☐ d) uva

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES